SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1
GOD. XI.

ZAGREB
1960 – 61

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u četiri broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.

Pretplata za 4 broja iznosi Din 300.—. — Pojedini se broj prodaje po Din 75.—. Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884. — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GOD. XI.

ZAGREB
1960 – 61

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

SADRŽAJ

1. ČLANCI

2. IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

3. ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

4. NOVE KNJIGE

5. ZADACI I RJEŠANJA

6. VJEŽBE ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

7. VJEŽBE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

8. KRIŽALJKE

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA XI. BROJ 1	ZAGREB	ŠKOL. GOD. 1960. — 1961.

Ispitivanje strukture kristala rentgenskim zrakama

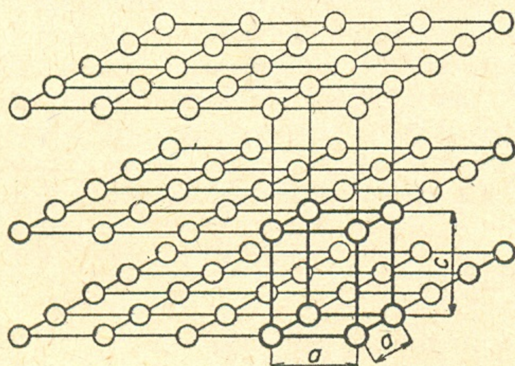
ANTUN BONEFAČIĆ, Zagreb

Polikristali i monokristali

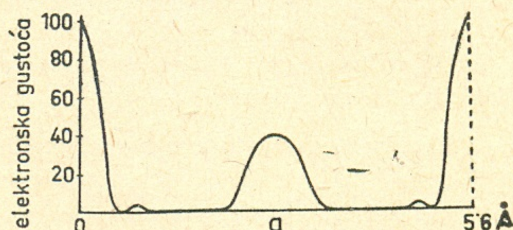
Veći dio tvari oko nas, na primjer stijenje i metali, su polikristali. To znači da su sastavljeni od mnoštva sitnih kristalnih zrnaca (dimenzije 10^{-4}—10^{-5} cm). Rjeđe nailazimo u prirodi na kristale samce ili monokristale. Monokristali se odlikuju pravilnošću svog oblika, glatkim i ravnim plohama, bridovima i simetrijom. Pravilni vanjski oblik odraz je unutarnjeg svojstva kristala, pravilne raspodjele atoma u kristalu.

Prostorna rešetka i elementarna ćelija kristala

Osnovna osobina kristala, po kojoj se oni bitno razlikuju od drugih tvari, jeste periodički raspored čestica u kristalu. Atomi, ioni ili molekule raspoređeni su pravilno unutar čitavog prostora kristala, oni čine prostornu rešetku. Tu prostornu rešetku možemo zamisliti da je sagrađena od mnoštva pravilno poredanih, sićušnih paralepipeda sa stranicama a, b i c i kutovima α, β i γ. Jedan takav paralepiped nazivamo elementarnom ćelijom kristala. Šest veličina a, b, c, α, β i γ koje karakteriziraju elementarnu ćeliju kristala nazivaju se parametri.



Sl. 1. Shema tetragonske prostorne rešetke. Debljim linijama izvučena je elementarna ćelija.



Sl. 2. Grafički prikaz elektronske gustoće paralel. bridu a elementarne ćelije kristala kamene soli.

Elementarnu ćeliju oblika kosokutnog paralepipeda nazivamo triklinskom. Ako je pak $\alpha = \gamma = 90°$ ćelija je monoklinska. Ćelija oblika pravokutnog paralepipeda naziva se rompska, ako je pak $a = b \neq c$, ona je tetragonska (sl. 1.). Ako je $a = b \neq c$ i $\alpha = \beta = 90°$, a $\gamma = 120°$ ćelija je heksagonska. Najjednostavnija je kubična ćelija, koja ima oblik kocke.

U elementarnoj ćeliji može se nalaziti mnogo atoma. Određivanje strukture kristala sastoji se u određivanju koordinata svih atoma u elementarnoj ćeliji. Elementarne ćelije pravilno se nižu u kristalu, pa znamo li položaj atoma u jednoj elementarnoj ćeliji, poznata je time i cjelokupna struktura kristala.

Kristal kao difrakciona rešetka za rentgenske zrake

Difrakcionom ili optičkom rešetkom nazivamo u optici niz pukotina. Te pukotine mogu biti kakva bilo oblika, mogu biti urezane na kakvom bilo zastoru, bitno je da se pravilno ponavljaju. Ako je period ponavljanja (ili konstanta rešetke) d, iz optike je poznato da se maksimumi svjetlosti javljaju pod kutovima koji zadovoljavaju jednadžbu

$$d \sin \varphi = \lambda$$

Period rešetke d određuje mjesto gdje se nalaze maksimumi, a oblik pukotine određuje intenzitet maksimuma.

No i obrnuto, pojavu difrakcije može se iskoristiti za proučavanje strukture rešetke na kojoj se zrake difraktiraju. Mjerenjem razmaka linija difrakcije može se naći period rešetke (uz poznatu dužinu vala λ), a iz intenziteta pojedinih linija može se izvesti zaključak o strukturi mjesta na kojem se zrake difraktiraju.

Vidjeli smo da je kristal u stvari prostorna rešetka koju sačinjavaju atomi. Mjesto da promatramo raspored atoma ili iona u kristalnoj rešetci možemo promatrati raspored njihovih elektronskih oblaka, jer se rentgenske zrake raspršuju baš na elektronima. Na sl. 2. prikazana je gustoća elektrona (broj elektrona na 1 Å^3) paralelno bridu kristala kamene soli. Maksimum elektronske gustoće označava centar atoma. Veći maksimum pripada atomu klora, manji atomu natrija. Period elektronske gustoće u tom pravcu je 5,6 Å, t. j. na svakih 5,6 Å ponavlja se isti raspored elektronske gustoće kao na sl. 2.

Grafički ne možemo prikazati elektronsku gustoću elementarne ćelije, no kad znamo da se elementarna ćelija prostorno ponavlja, sličnost i razlika između kristala i optičke rešetke je očevidna. Kristal je difrakciona rešetka u kojoj se ista »pukotina« ponavlja ne u jednom, već u tri smjera. Ulogu »pukotine« preuzima ovdje elementarna ćelija kristala.

Razlika između optičke i kristalne rešetke je prvo u tome što se optička rešetka prostire u pravcu ili ravnini, a kristalna rešetka je prostorna rešetka. Druga razlika je u veličini perioda s kojim se ponavlja pukotina optičke rešetke i »pukotina« (elementarna ćelija) u kristalu. Period optičke rešetke ima dimenziju reda veličine kojoj pripada valna dužina vidljive svjetlosti, dok je kristalna rešetka idealna difrakciona rešetka za rentgenske zrake. Ta misao sinula je prvi put 1912. god. *Laue*-u, tada docentu teorijske fizike na Münchenskom sveučilištu. Na osnovi njegove zamisli izveli su *Friedrich* i *Knipping* pokus kojim je prvi put dobivena difrakcija rentgenskih zraka na kristalu.

Mjerenje parametara elementarne ćelije kristala i određivanje položaja atoma u elementarnoj ćeliji

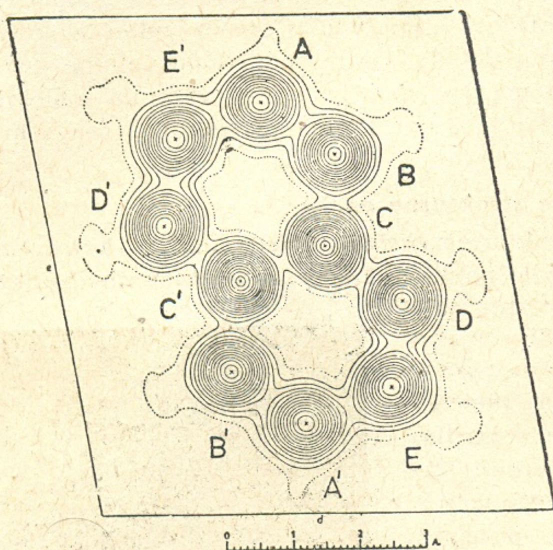
U kristalu možemo zamisliti niz ploha koje prolaze čvorovima rešetke. Udaljenost među susjednim plohama u smjeru normale nazivamo međuplošnom udaljenošću. Kada snop monokromatskih rentgenskih zraka padne na kristal, difraktirane rentgenske zrake dobit ćemo samo onda, kada je neki niz kristalnih ploha postavljen pod kutom koji je dan Bragg-ovom jednadžbom

$$n \lambda = 2 d \sin \Theta$$

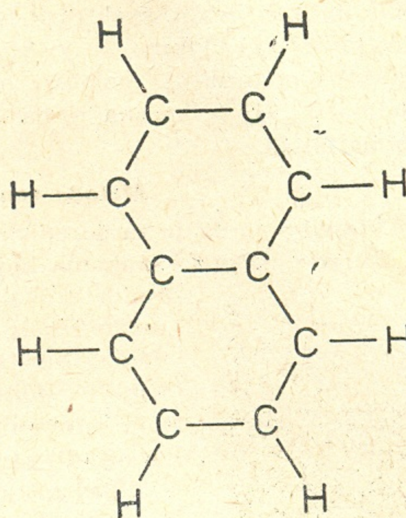
gdje je n cijeli broj koij označuje red refleksije, λ valna dužina upotrebljenih rentgenskih zraka, d međuplošna udaljenost.

Eksperimentalno se može izmjeriti kut Θ i iz gornje jednadžbe izračunati međuplošne udaljenosti u kristalu. Iz tih podataka mogu se izračunati veličine bridova elementarne ćelije, a iz optičkih mjerenja mogu se odrediti kutovi među tim bridovima.

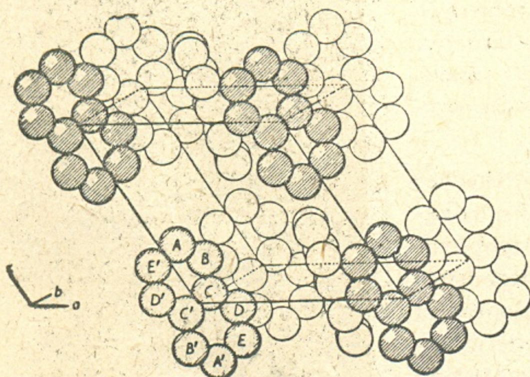
U najjednostavnijim slučajevima, određivanjem parametara elementarne ćelije određena je i struktura kristala, jer se iz simetrije ćelije može zaključiti gdje se atomi nalaze. No ako u elementarnoj ćeliji ima mnogo atoma, a ćelija nije kubična, određivanje kristalne strukture je mnogo kompliciranije. Osim mjerenja smjera difraktiranih zraka potrebno je mjeriti i njihov intenzitet. Na osnovu eksperimentalno izmjerenih intenziteta difraktiranih zraka, može se dugotrajnim računanjem naći raspored elektronske gustoće u kristalu. Elektroni su koncentrirani oko atoma. Tamo gdje je elektronska gustoća najveća, znači da se nalazi atom s najvećim rednim brojem, t. j. s najvećim brojem elektrona.



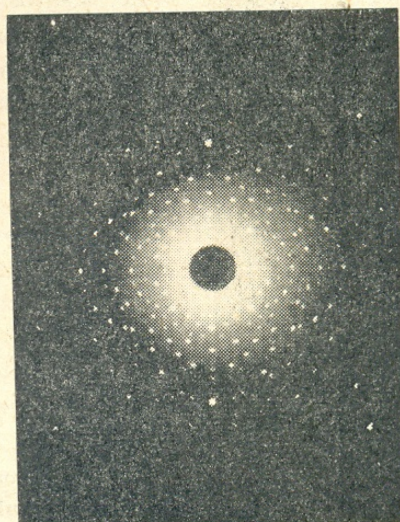
Sl. 3. a) Krivulje jednake elektronske gustoće, koje prikazuju položaje atoma jedne molekule naftalina.



Sl. 3. b) Struktura formula molekule naftalina



Sl. 3. c) Elementarna ćelija kristala naftalina.



Sl. 4. Ogibna slika rentgenskih zraka na kristalnoj rešetci živinog sulfata po Laue-ovoj metodi. Difrakcione pjege podijeljene dvjema, međusobno okomitim ravninama simetrije, odaju rombsku simetriju kristala.

Na primjer u kristalu naftalina $C_{10}H_8$ bio je izmjeren intenzitet nekoliko stotina difraktiranih zraka. Iz tih podataka bila je nađena elektronska gustoća u svim točkama elementarne ćelije. Na sl. 3a prikazan je presjek elektronske gustoće proveden kroz centre atoma jedne molekule naftalina. Elektronska gustoća prikazuje se na isti

način kao i visina gorja na geografskim kartama. Jedna linija povezuje mjesta iste elektronske gustoće, kao što na geografskim kartama jedna linija povezuje mjesta iste nadmorske visine. »Visina« maksimuma proporcionalna je broju elektrona u atomima. Atomi ugljika imaju svaki po šest elektrona, atom vodika samo jedan elektron. Deset jakih maksimuma, to je deset atoma ugljika. Osam slabih maksimuma (izvučeni crtkano) označuje položaje osam atoma vodika. Strukturna formula molekule naftalina $C_{10} H_8$ prikazana je na sl. 3b. Na sl. 3c prikazana je jedinična ćelija kristala naftalina.

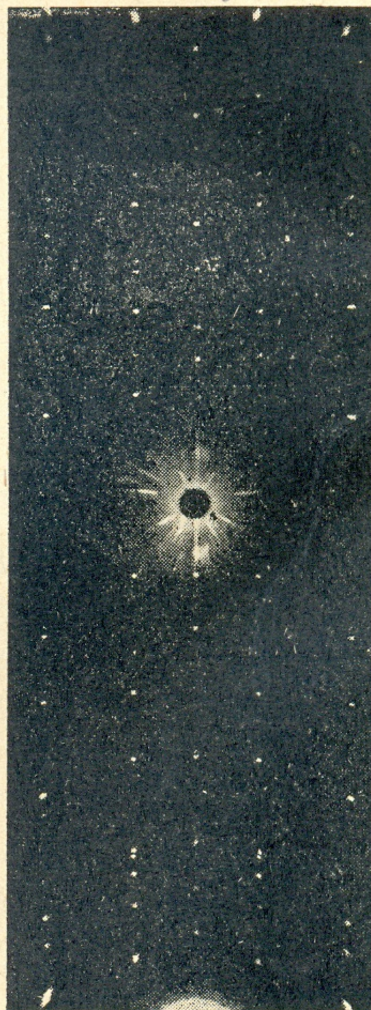
Metode rentgenske strukturne analize

Vidjeli smo da je za određivanje strukture potrebno mjeriti kut 2Θ, kojeg čine difraktirane zrake sa zrakama koje su pale na kristal kao i intenzitet tih difraktiranih zraka. Ta se mjerenja mogu vršiti različitim metodama. Najstarija i najpoznatija je fotografska metoda, gdje istovremeno pada na film mnogo difraktiranih zraka. Taj se film naziva rentgenogram. Postoji više metoda snimanja rentgenograma, od kojih su najpoznatije: Laueova metoda, metoda rotirajućeg kristala i metoda praška.

Kod Laueove metode upotrebljava se »bijela« rentgenska svjetlost, t. j. rentgenske zrake koje sadrže različite dužine vala. Takve zrake padaju na kristal koji miruje i na njemu se difraktiraju. Na sl. 4. prikazana je ogibna slika po Laueovoj metodi na monokristalu živinog sulfata. Laueova metoda danas se koristi uglavnom samo za određivanje simetrije kristala.

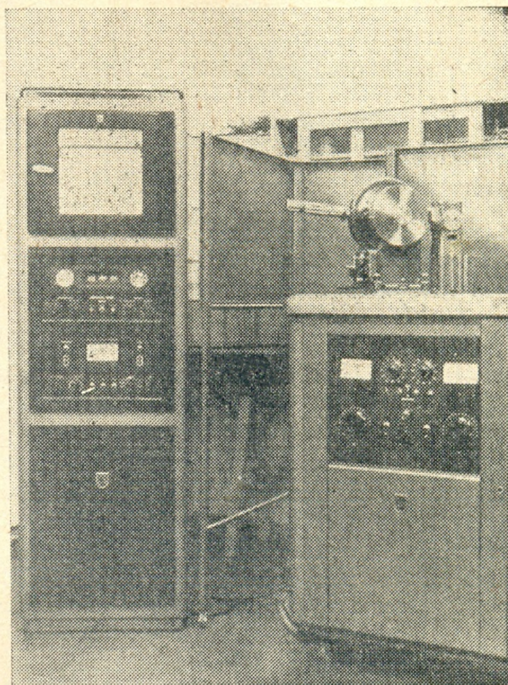
Kod metode rotirajućeg kristala, kristalografska os zatvara stalan kut s monohromatskim snopom rentgenskih zraka. Kristal polagano rotira oko osi i uvjet difrakcije ispunjava se redom za pojedine plohe. Ako rotacija nije potpuna, već kristal samo oscilira u nekom kutnom području govori se o metodi oscilacije. U oba slučaja na cilindričnom filmu poredaju se difraktirani maksimumi u nizove. Mjerenjem razmaka nizova na rentgenogramu može se izračunati veličina brida elementarne ćelije. Na slici 5. prikazan je oscilogram monokristala živinog sulfata.

Sl. 5. Ogibna slika monokromatskih rentgenskih zraka na monokristalu živinog sulfata, koji je oscilirao za vrijeme snimanja oko jedne kristalografske osi.



Sl. 6. Ogibna slika kristalnog živinog sulfata.

Za metodu praška ili Debye-Scherrer-ovu metodu, kako se naziva po pronalazačima, nije potreban monokristal, već se može ispitivati kristalni prašak. Rentgenske zrake padaju na fine kristalne čestice koje sačinjavaju prašak i orijentirane su u svim smjerovima. Monohromatski snop rentgenskih zraka difraktirat će se na kristalićima koji su orijentirani tako da zadovoljavaju Bragg-ovu jednadžbu. Difraktirane zrake sačinjavaju konus koji presijeca fotografski film u obliku prstena. Sl. 6. prikazuje debajgram kristalnog praška živinog sulfata.



Sl. 7.

Metoda praška nije pogodna za određivanje strukture, no vrlo se mnogo upotrebljava u različite svrhe, naročito za analizu pojedinih tvari. Svaka vrsta kristalne tvari, zbog njoj svojstvenih međuplošnih razmaka, daje naime svoj karakteristični sistem linija. Kao što se svaki čovjek može prepoznati po otiscima svojih prstiju, može se svaka kristalna tvar prepoznati po svom debajgramu. Dovoljan je miligram tvari, koja i nakon analize ostaje nepromijenjena, što nije slučaj kod kemijske analize. Na taj način ispituju se različite metalne legure, boje, fluorescentne prevlake, produkti korozije, nečistoće u metalima, a to su samo neke od mnoštva primjena te metode.

Pored fotografskog registriranja difraktiranih rentgenskih zraka u novije doba sve se više upotrebljava mjerenje difraktiranih zraka pomoću brojača. Na sl. 7., prikazan je uređaj sa Geiger-Müller-ovim brojačem, koji se u tu svrhu upotrebljava u rentgenskom laboratoriju »Ruđer Bošković« u Zagrebu.

I. Napomena:
Slike 4., 5. i 6. snimljene su u rentgenskom laboratoriju Instituta »Ruđer Bošković« u Zagrebu.

II. Napomena:
Opširnije o upotrebi rentgenskih zraka vidi: D. Grdenić, Rentgenske zrake u nauci i tehnici, Zagreb (1948) (izdanje knjižnice »Prirode«), i
D. Grdenić, Rentgenska strukturna analiza kao najmoćniji mikroskop, Almanah »Bošković« za 1951. godinu.

Povećanje tačnosti rešenja jednačina nađenih grafičkim putem

NIKOLA LJ. ĆIRIĆ, Pirot

A) Mnogi teoriski i praktični problemi svode se na neku jednačinu, algebarsku ili transcendentnu*, čija rešenja pretstavljaju i rešenja odgovarajućeg problema. Iz toga razloga je rešavanje jednačina posebno važan zadatak matematike. Metode za rešavanje jednačina su raznovrsne i treba znati da ne postoji neka univerzalna metoda, neki šablonski postupak

* Jednačine se dele na algebarske i transcendentne prema tome koje su računske operacije primenjene nad argumentom.

koji uvijek dovodi do rezultata. Sve postojeće metode ipak možemo svrstati u dve osnovne grupe: metode koje daju točne rezultate, i koje se u veoma ograničenom broju slučajeva mogu primeniti, i metode koje daju približbne vrednosti rešenja — približne metode — koje se primenjuju u ogromnoj većini slučajeva. U srednjoj školi upoznali smo se delimično sa obema metodama. Kod linearnih, kvadratnih, bikvadratnih, binomnih kao i nekih trigonometrijskih jednačina dolazili smo do tačnih rešenja putem izvesnih obrazaca koji su rešenja tih jednačina izražavali pomoću njenih koeficijenata. Rešavajući kvadratne jednačine grafičkom metodom vidjeli smo kako se njena rešenja mogu približno odrediti. Upravo je baš grafička metoda jedna od približnih.

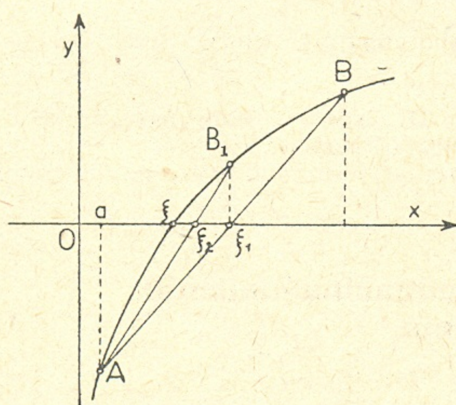
Zadržimo se na grafičkoj metodi jer je ona osnov mnogih približnih metoda. Naime, ako treba rešiti jednačinu $f(x) = 0$, onda ćemo najpre u koordinatnom sistemu XOY konstruisati grafik funkcije $y = f(x)$. Rešenja jednačine $f(x) = 0$, kao što znamo su one vrednosti argumenta x za koje je funkcija $y = f(x)$ jednaka nuli (nule funkcije). Prema tome, apscise zajedničkih tačaka grafika funkcije $y = f(x)$ sa OX osom predstavljaju rešenja date jednačine $f(x) = 0$.

Često je prilikom grafičkog rešavanja jednačine $f(x) = 0$ zgodno funkciju $y = f(x)$ napisati u obliku razlike dve funkcije, tj. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Ako je $f(\xi) = 0$, onda je i $f_1(\xi) - f_2(\xi) = 0$ tj. $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, što znači da su rešenja jednačine $f(x) = 0$ one vrednosti $x = a$ za koje je $f_1(x) = f_2(x)$, dakle, to su apscise zajedničkih tačaka krivih linija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$. Prema tome, treba konstruisati grafike funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ pa izmeriti apscise njihovih zajedničkih tačaka. Te apscise su tražena rešenja jednačine $f(x) = 0$. Ovo je veoma važno jer je lakše konstruisati grafike funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ nego grafik funkcije $y = f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Sa kojom ćemo tačnošću odrediti grafičkim putem rešenja jednačine zavisi od tačnosti crtanja.** Ova tačnost uglavnom ne može biti zadovoljavajuća. Pored toga nedostatak ove metode je u tome što se rešenja jednačine ne mogu odrediti sa unapred željenom tačnošću, na pr. sa tačnošću od 10^{-1} ili 10^{-2}. Grafička metoda je osnov nekim približnim metodama kojima se tačnost rešenja nađena grafičkim putem može povećati, upravo pomoću kojih se rešenja mogu odrediti sa unapred željenom tačnošću.

B) Pretpostavimo da treba rešiti jednačinu $f(x) = 0$. Najpre ćemo konstruisati grafik odgovarajuće funkcije $y = f(x)$ i uočiti deo AB tog grafika sa raznih strana ose OX, dakle u blizini njegove presečne tačke sa osom OX (slika 1). Sa grafika vidimo da se rešenje ξ nalazi između apscisa a i b tačaka A i B, tj. $a < \xi < b$.

Pošto je ovaj interval veliki to je tačnost sa kojom je rešenje ξ određeno sasvim nedovoljna. Pokažimo kako se tačnost može povećati.



Sl. 1

U tu svrhu napisaćemo jednačinu sečice koja prolazi kroz tačke $A[a, f(a)]$ i $B[b, f(b)]$ krive $y = f(x)$:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1)$$

Stavljajući sada u jednačinu (1) $y = 0$ dobijamo apscisu ξ_1 presečne tačke sečice (1) sa osom OX, tj.

$$\xi_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (2)$$

ξ_1 je približna vrednost rešenja ξ i $a < \xi_1 < b$. Formula (2) se obično zove *regula falsi*.

Napisavši sada jednačinu sečice koja prolazi kroz tačke $A[a, f(a)]$ i $B_1[\xi_1, f(\xi_1)]$, ako tačke A i B_1 leže sa raznih strana ose OX (kao na slici 1), ili kroz tačke $B[b, f(b)]$ i $B_1[\xi_1, f(\xi_1)]$, ako tačke B i B_1 leže sa raznih strana ose OX, i stavljajući u njoj $y = 0$, dobićemo sledeću približnu vrednost ξ_2 rešenja jednačine $f(x) = 0$, tj.

$$\xi_2 = \frac{a \cdot f(\xi_1) - \xi_1 \cdot f(a)}{f(\xi_1) - f(a)} \qquad (3)$$

** Grafičkom metodom se određuju samo realna rešenja.

Interval (a, b) u kome se nalazilo rešenje ξ je sada sužen na interval (a, ξ_1), odnosno (ξ_1, b), tj. $a < \xi < \xi_1$ ili $\xi_1 < \xi < b$. Ako nas i ovaj rezultat svojom tačnošću ne zadovoljava postupak treba ponoviti. Ponavljanjem ovog postupka interval u kome se nalazi rešenje ξ biće manji a samim tim i tačnost rešenja veća.

Metoda ponavljanja izračunavanja, pri kojoj svako dalje izračunavanje iskorišćava rezultat prethodnog, u matematici se zove *metoda uzastopnih aproksimacija*, ili metoda iteracije u slučaju ponavljanja istog postupka.

Kod izložene metode (možemo je nazvati metoda *regula falsi*) karakteristično je to da se luk krive zamenjuje odgovarajućom sečicom, prema tome i presečna tačka luka krive presečnom tačkom sečice. Ukoliko je razlika apscisa krajnjih tačaka luka manja utoliko je sečica kraća a presečne tačke luka i odgovarajuće sečice sa OX osom bliže.

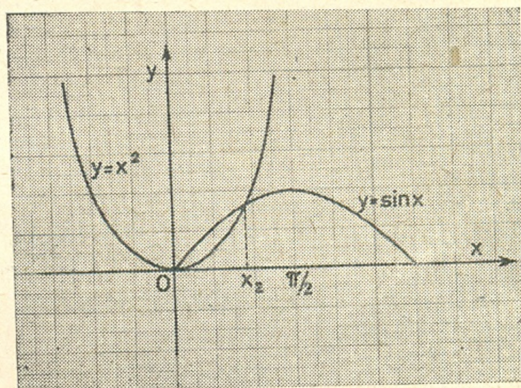
C) Pokazaćemo na dva primera kako se ova metoda primenjuje.

Primer 1. Rešiti jednačinu $x^2 - \sin x = 0$. Rešenja ove jednačine su apscise presečnih tačaka krivih $y = x^2$ i $y = \sin x$ (slika 2). Kao što se sa slike vidi ova jednačina ima dva rešenja: jedno rešenje je $x_1 = 0$, a drugo rešenje x se nalazi između 0,8 i 1, tj. $0{,}8 < x < 1$. Primenom metode regula falsi možemo granice intervala, u kome se nalazi x_2 suziti. Odredimo na pr. x_2 sa tačnošću od 10^{-2}.

$$f(x) = x^2 - \sin x$$

$$f(0{,}8) = 0{,}8^2 - \sin 0{,}8^* = -0{,}07 < 0,$$

$$f(1) = 1^2 - \sin 1 = 0{,}16 > 0.$$



Sl. 2

Pošto su $f(0{,}8)$ i $f(1)$ različitog znaka to se rešenje x_2 zaista nalazi između 0,8 i 1. Pomoću formule (2) možemo sada naći približno rešenje ξ_1:

$$\xi_1 = \frac{0{,}8 \cdot f(1) - 1 \cdot f(0{,}8)}{f(1) - f(0{,}8)} \approx 0{,}86$$

Pošto je

$$f(0{,}86) = 0{,}86^2 - \sin 0{,}86 = -0{,}0182 < 0,$$

to se rešenje x_2 nalazi između 0,86 i 1, dakle $0{,}86 < x_2 < 1$. Kako je pak $f[(0{,}86 + 1)/2] = f(0{,}93) = 0{,}93^2 - \sin 0{,}93 = 0{,}0633 > 0$, to je $0{,}86 < x_2 < 0{,}93$. Primenimo li ponovo formulu (2) dobićemo;

$$\xi_2 = \frac{0{,}86 \cdot f(0{,}93) - 0{,}93 \cdot f(0{,}86)}{f(0{,}93) - f(0{,}86)} \approx 0{,}87$$

Kako je $f(0{,}87) = -00074 < 0$, to je $0{,}87 < x_2 < 0{,}93$. Pošto je pak

$$f[(0{,}87 + 0{,}93)/2] = f(0{,}90) = 0{,}0267 > 0, \text{ to je } 0{,}87 < x_2 < 0{,}90.$$

Nađemo li sada i $f[(0{,}87 + 0{,}90)/2] = f(0{,}88) = 0{,}0037 > 0$, zaključujemo da je $0{,}87 < x_2 < 0{,}88$. Dakle, sada je rešenje x_2 određeno sa tačnošću od $0{,}01 = 10^{-2}$ kao što smo i želili. Povećanje tačnosti rešenja se ovim putem može nastaviti prema potrebi. Na primer, u ovom slučaju dalje bi bilo:

$$\xi_3 = \frac{0{,}87 \cdot f(0{,}88) - 0{,}88 \cdot f(0{,}87)}{f(0{,}88) - f(0{,}87)} \approx 0{,}8738, \text{ itd.}$$

Primer 2. Rešiti jednačinu $f(x) = x^3 - 2x - 5 = x^3 - (2x + 5) = 0$. Rešenja ove jednačine su apscise presečnih tačaka krivih $y = x^3$ i $y = 2x + 5$. Sa slike 3 vidimo da je traženo rešenje $x \approx 2$. Ako izračunamo $f(2)$ i $f(2{,}1)$ videćemo da je $f(2) = -1 < 0$, a $f(2{,}1) = 0{,}061 > 0$, dakle $2 < x < 2{,}1$. Na osnovu formule (2) biće dalje:

$$\xi_1 = \frac{2 \cdot f(2{,}1) - 2{,}1 \cdot f(2)}{f(2{,}1) - f(2)} \approx 2{,}0943.$$

---

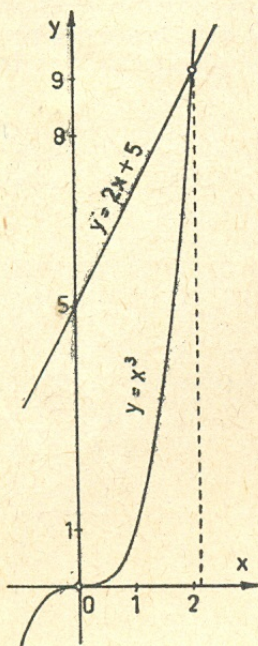
* Za određivanje vrednosti trigonometrijskih funkcija apstraktnog argumenta čitaoc se može poslužiti Tablicom goniometrijskih funkcija ugla u radijanima, koja se nalazi na str 170-171 u Numer. i log. tabl. V. Miškovića.

Kako je $f(\xi_1) = f(2{,}0943) = -0{,}0028 < 0$ to je $2{,}0943 < x < 2{,}1$. Dalje je

$$\xi_2 = \frac{2{,}0943 \cdot f(2{,}1) - 2{,}1 \cdot f(2{,}0943)}{f(2{,}1) - f(2{,}0943)}.$$

S obzirom da je $f(\xi_2) = f(2{,}0946) = 0{,}00054 > 0$, to je $2{,}0943 < x < 2{,}0946$, pa je dalje:

$$\xi_3 = \frac{2{,}0943 \cdot f(2{,}0946) - 2{,}0946 \cdot f(2{,}0943)}{f(2{,}0946) - f(2{,}0943)} \approx 2{,}09455.$$



Sl. 3

Sa ovom vrednošću možemo biti zadovoljni, pa kao približnu vrednost traženog rešenja uzeti $x = 2{,}09455$.

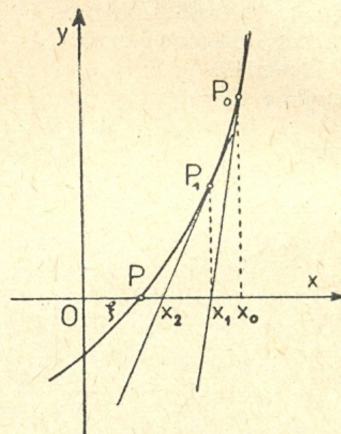
D) Pored metode regula falsi, kod koje se luk krive zamenjuje odgovarajućom sečicom, za povećanje tačnosti rešenja jednačina nađenih grafičkim putem upotrebljava se i takozvana *Njutnova metoda* kod koje se luk krive zamenjuje tangentom.

Pretpostavimo da treba rešiti jednačinu $f(x = 0)$. Kao i kod prethodne metode najprije bismo konstruisali grafik funkcije $y = f(x)$. Neka je zajednička tačka grafika i OX ose $P(\xi, 0)$. Uočimo tačku $P_0[x_0, f(x_0)]$ u blizini tačke P, povucimo u njoj tangentu i odredimo apscisu x_1 njene presečne tačke sa OX osom (slika 4). Jednačina tangente u tački P_0 je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

dakle je za $y = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (4)$$



Sl. 4

Formula (4) daje približnu vrednost rešenja ξ. Sada bismo u tački $P_1[x_1, f(x_1)]$ povukli tangentu pa na isti način našli apcisu x_2 njene presečne tačke sa OX osom, itd. Na ovaj način dobijali bismo sve približnije vrednosti x_k traženog rešenja ξ.

E) Neka čitalac primeni metodu regula falsi na ovim primerima:

1. $\sin x - 1/x = 0$; 2. $\cos x = 5x$; 3. $\log x - \sin x = 0$; 4. $x^3 - x - 2 = 0$.

Analitičko i geometrisko rešavanje nekih iracionalnih jednačina

DRAGIŠA STEVANOVIĆ, Zrenjanin

Jednačine koje sadrže nepoznatu pod ma kakvim korenom nazivaju se *iracionalnim jednačinama.*

Izložioci tih korena mogu biti ma kakvi brojevi, ali mi ćemo rešavati samo iracionalne jednačine u kojima se javljaju isključivo kvadratni koreni. Takve jednačine mogu da sadrže samo jedan, dva, pa i više kvadratnih korena, kao naprimer ove:

$$\sqrt{x-5} - 2 = 0, \quad \sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} = 1 \quad \text{i} \quad \sqrt{4x+1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x+3}.$$

Rešavanje takve jedne jednačine, svodi se, kvadriranjem obeju strana, na jednu *racionalnu jednačinu,* koja se naziva *rezolventnom jednačinom* date iracionalne jednačine.

Pitanje je sad da li se kvadriranjem obeju strana neke jednačine dobija ekvivalentna jednačina datoj jednačini.

Da bismo na ovo pitanje odgovorili, poći, ćemo, naprimer, od ove jednačine

(1) $A = B,$

gde su A i B izrazi koji sadrže nepoznate. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo imaćemo

(2) $A^2 = B^2.$

Za svako rešenje jednačine (1) A i B imaju jednake numeričke vrednosti; isto tako njihovi kvadrati, što znači da je i jednačina (2) zadovoljena. Obratno, za svako rešenje jednačine (2) A^2 i B^2 imaju jednake numeričke vrednosti, tj. $A^2 - B^2 = 0$ ili $(A + B)(A - B) = 0$.

Kako je proizvod jednak nuli ako je bilo koji činilac nula, poslednja jednačina se svodi na jednačine

(3) $A - B = 0$ i (4) $A + B = 0.$

Iz (3) imamo $A = B$, znači jednačina (1) je zadovoljena. Ali, iz (4) imamo $A = -B$, te jednačina (1) nije zadovoljena. Jednačina (4) se dobija (1) promenom znaka na desnoj strani. Dakle, jednačina (2) nije ekvivalentna jednačini (1). Jednačina (2) sadrži sva rešenja jednačine (1), ali ona može sadržati i druga, a to su rešenja jednačine $A = -B$, ako ih ima.

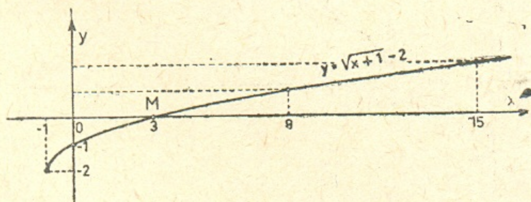
Prema tome, *dizanjem na kvadrat obeju strana date jednačine ne dobija se ekvivalentna jednačina, nego se tom operacijom uvode još neki koreni, koji se nazivaju stranim korenima date iracionalne jednačine.*

Zbog toga, pri rešavanju iracionalne jednačine moramo uvek proveriti da li rešenja odgovarajuće racionalne jednačine zadovoljavaju i datu iracionalnu jednačinu. Na primerima ćemo pokazati o čemu treba voditi računa pri rešavanju iracionalnih jednačina. Istovremeno ćemo rešavati iracionalne jednačine analitički i geometriski. Uzećemo u obzir najjednostavnije slučajeve, naime ove:

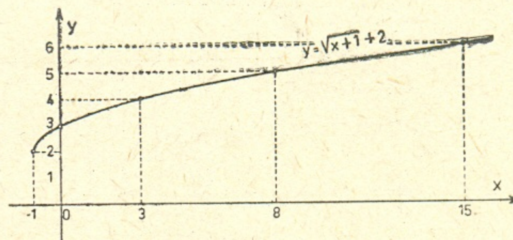
1. Jednačine oblika $\sqrt{A} + B = 0$, gde je A linearna funkcija, a B broj, ili A linearna funkcija i B linearna funkcija.

Primeri. 1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+1} - 2 = 0$.

Uzmimo u obzir samo aritmetičku vrednost kvadratnog korena. Rešimo datu jednačinu prvo analitički. Imamo $\sqrt{x+1} = 2$. Ako obe strane ove jednačine dignemo na kvadrat, dobićemo racionalnu jednačinu $x + 1 = 4$, odakle je $x = 3$. Proverimo tačnost dobijenog rešenja. Pošto smo uzeli u obzir samo aritmetičku vrednost korena mora biti $x + 1 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant -1$. Broj 3 zadovoljava ovaj uslov, prema tome on je koren date jednačine.



Sl. 1

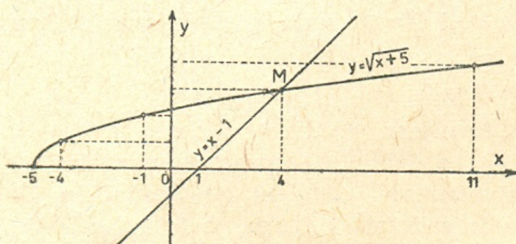


Sl. 2

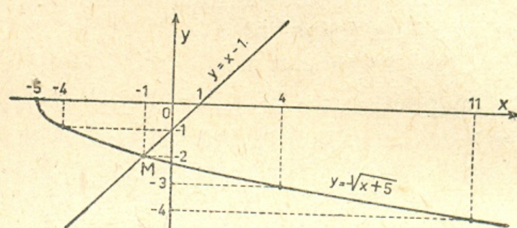
Rešimo sad geometriski datu jednačinu. Stavimo $y = \sqrt{x+1} - 2$ i konstruišimo grafik ove funkcije. Mora biti $x + 1 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant -1$. Iz sl. 1 vidimo da grafik funkcije $y = \sqrt{x+1} - 2$ seče osu x u tački M čija je apscisa 3. Dakle, funkcija

$y = \sqrt{x+1} - 2$ ima nulu za $x = 3$, prema tome jednačina $\sqrt{x+1} - 2 = 0$ ima jedan koren $x = 3$.

2. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+1} + 2 = 0$. Iz same strukture jednačine možemo zaključiti da je ova jednačina nemoguća, tj. ona nema rešenja, jer zbir dva pozitivna broja ne može biti jednak nuli. Do istog zaključka možemo doći ako je rešimo i analitički i geometriski. Imamo $\sqrt{x+1} = -2$. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo, dobićemo racionalnu jednačinu $x + 1 = 4$, odakle je $x = 3$. Međutim, broj 3 nezadovoljava datu jednačinu. Ako konstruišemo grafik funkcije $y = \sqrt{x+1} + 2$ (sl. 2), vidimo da njen grafik ne seče osu x. Dakle, funkcija $y = \sqrt{x+1} + 2$ nema nula, a jednačina $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ nema rešenja.



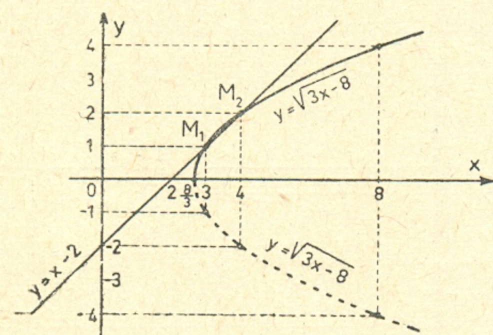
Sl. 3



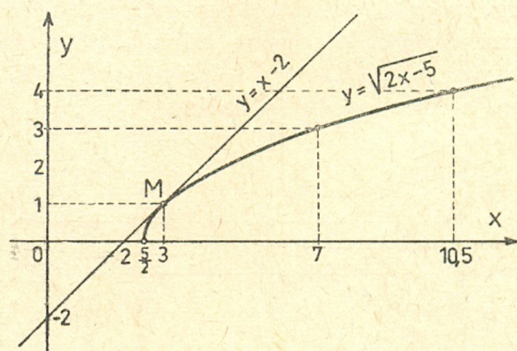
Sl. 4

Napomena. Jednačina $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ se zove »konjugovana jednačina« jednačine $\sqrt{x+1} - 2 = 0$.

3. Rešiti jednačinu $x - 1 = \sqrt{x+5}$. Ako obe strane ove jednačine kvadriramo dobićemo jednačinu $x^2 - 3x - 4 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 4, x_2 = -1$. Samo prvo rešenje zadovoljava datu jednačinu. Drugo rešenje zadovoljava njoj konjugovanu jednačinu $x - 1 = -\sqrt{x+5}$. Da bismo datu jednačinu $x - 1 = \sqrt{x+5}$ rešili geometriski, stavimo $y = x - 1$ i $y = \sqrt{x+5}$. Grafik funkcije $y = x - 1$ je prava, a grafik funkcije $y = \sqrt{x+5}$ je kvadratna poluparabola (sl. 3). Mora biti $x + 5 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant -5$. Iz slike 3 vidimo da prava seče krivu u tački M čija je apscisa $x = 4$. Prema tome jednačina $x - 1 = \sqrt{x+5}$ ima koren.



Sl. 5



Sl. 6

Da bismo rešili drugu jednačinu konstruišimo grafike funkcija $y = x - 1$ i $y = -\sqrt{x+5}$ (sl. 4). Iz slike 4 vidimo da se ova dva grafika seku u tački M čija je apscisa $x = -1$. Prema tome, jednačina $x - 1 = -\sqrt{x+5}$ ima koren.

4. Rešiti jednačinu $x - 2 = \sqrt{3x - 8}$. Analitičko rešavanje daje dva korena $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$. Oba korena zadovoljavaju datu jednačinu. Konstruisani grafici funkcija $y = x - 2$ i $y = \sqrt{3x - 8}$ (sl. 5) seku se u dvema tačkama M_1 i M_2 čije su apscise $x_1 = 3$ i $x_2 = 4$.

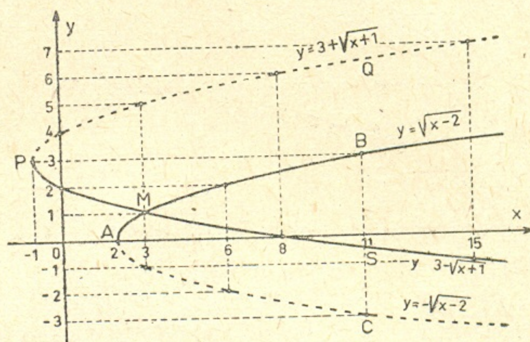
Konjugovana jednačina $x - 2 = -\sqrt{3x - 8}$ nema korena. Na slici 5 tačkasta kriva $y = -\sqrt{3x - 8}$ ne seče se sa pravom $y = x - 2$.

5. Rešiti još jednačinu $x - 2 = \sqrt{2x - 5}$. Analitičko rešavanje daje dvostruki koren $x = 3$. Iz slike 6 vidimo da se grafici funkcija $y = x - 2$ i $y = \sqrt{2x - 5}$ diraju u tački M, čija je apscisa $x = 3$.

Konjugovana jednačina $x - 2 = -\sqrt{2x - 5}$ nema rešenja.

Na osnovu rešenih primera iracionalnih jednačina oblika $\sqrt{A} + B = 0$, gde su A i B linearne funkcije, možemo dati sledeći zaključak o broju korena, tj. mogu biti tri slučaja: 1. jednačina ima dva realna korena, 2. jedan realan koren i 3. nema koren.

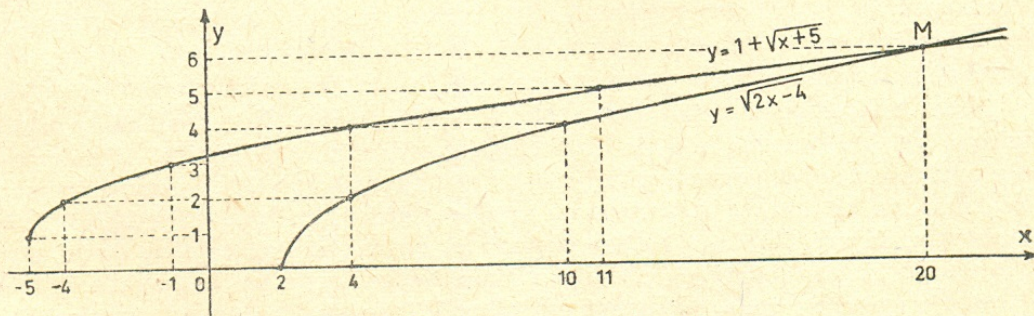
2. Uzmimo sad u obzir iracionalne jednačine oblika $\pm\sqrt{A} \pm \sqrt{B} + C = 0$, gde su A i B linearne funkcije, a C broj.



Sl. 7

Primeri. 1. Rešiti jednačinu $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$. Sastavimo i tri konjugovane jednačine: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 3$, $-\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$, $-\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 3$. Ako svaku od ovih jednačina dvaput kvadriramo dobićemo racionalnu jednačinu $x - 2 = 1$, odakle je $x = 3$. **Broj 3 je koren samo prve jednačine, a** stran je koren za konjugovane jednačine.

Da bismo rešili geometriski jednačinu $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$, napišimo je ovako $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$ i konstruišimo grafike funkcija $y = \sqrt{x-2}$ i $y = 3 - \sqrt{x+1}$ (sl. 7). Ova dva grafika seku se u tački M čija je apscisa $x = 3$. Dakle, jednačina $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$ ima rešenje.



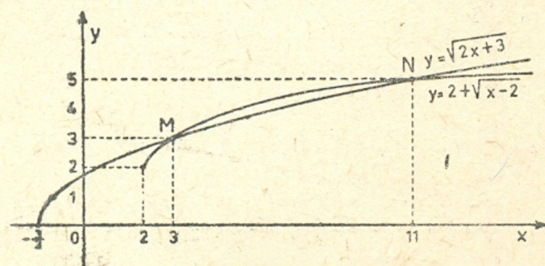
Sl. 8

Iz slike 7 vidimo da je: AB grafik funkcije $y = \sqrt{x-2}$, AC grafik funkcije $y = -\sqrt{x-2}$, PS grafik funkcije $y = 3 - \sqrt{x+1}$ i PQ grafik funkcije $y = 3 + \sqrt{x+1}$. Iz ove slike možemo zaključiti da konjugovane jednačine date jednačine nemaju rešenja.

2. Rešiti jednačinu $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$. Imamo $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$ Ako obe strane ove jednačine dvaput kvadriramo dobićemo racionalnu jednačinu $x^3-24x+80=0$, čiju su koreni $x_1=20$ i $x_2=4$. Samo prvi koren zadovoljava datu jednačinu, a drugi koren je stran koren. Lako se može uveriti da je on koren konjugovane jednačine $-\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5}=1$. Ostale dve konjugovane jednačine nemaju rešenja.

Konstruišimo sad grafike funkcija $y=\sqrt{2x-4}$ i $y=1+\sqrt{x+5}$ (sl. 8). Dakle, geometriski smo dobili isto rešenje, kao i analitički.

3. Rešiti jednačinu $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$. Pošto ovu jednačinu napišemo drugačije ovako $\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{x-2}$ i obe njene strane dignemo na kvadrat dobićemo, posle svođenja, jednačinu $4\cdot\sqrt{x-2}=x+1$, ekvivalentnu datoj. Ako obe strane ove poslednje jednačine dignemo na kvadrat, dobićemo, pri uslovu $x-2\geqslant0$, ekvivalentnu jednačinu $x^2-14x+33=0$, čiji su koreni $x_1=11$ i $x_2=3$. Obe vrednosti x zadovoljavaju uslov $x-2\geqslant0$, prema tome one su koreni date iracionalne jednačine.



Sl. 9

Konstruišimo sad grafike funkcija $y=\sqrt{2x+3}$ i $y=2+\sqrt{x-2}$ (sl. 9). Iz grafika vidimo da smo dobili ista rešenja, kao i analitički, tj. $x_1=11$ i $x_2=3$.

Na osnovu rešenih primera iracionalnih jednačina oblika $\pm\sqrt{A}\pm\sqrt{B}+C=0$, gde su A i B linearne funkcije i C broj, možemo dati ovaj zaključak o broju korena, tj. mogu biti tri slučaja: 1. jednačina ima dva realna korena, 2. jedan realan koren i 3. nema koren.

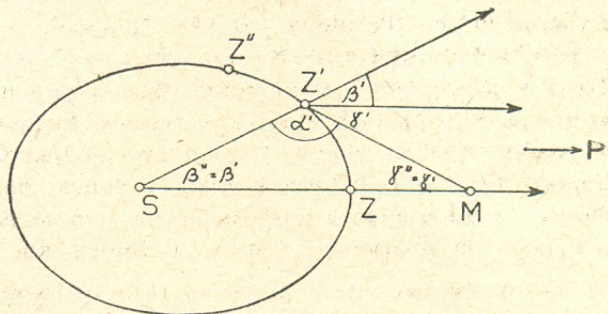
Keplerovi zakoni

MIRKO RADIĆ, Slav. Požega

Nakon što je Kopernik razorio vjeru da je Zemlja središte svemira, njegova nauka započela je svoj pobjedonosni, ali i trnoviti put, put koji karakterizira najveću duhovnu revoluciju. »Među svim otkrićima i uvjerenjima«, piše Goethe, »vjerojatno ni jedno nije izvršilo većeg utjecaja na ljudski duh od Kopernikove nauke.«

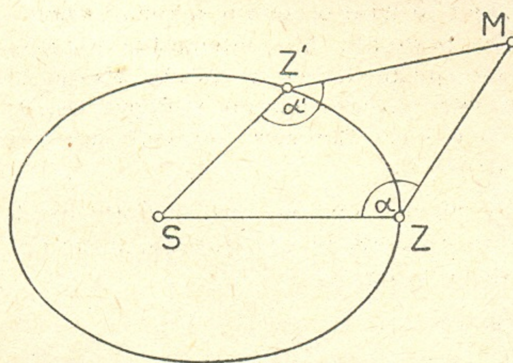
Danas nam izgleda čudno, da je moralo proći gotovo 300 godina da se u vatikanskom indeksu precrtaju djela Kopernika i njegovih nasljednika. Ne ćemo se ovdje upuštati u dobro poznato pitanje kako je Kopernik zamislio kosmos. Spomenut ćemo samo da se uskoro Kopernikove kružne staze planeta nisu najbolje slagale s iskustvom, sa sve finijim i finijim metodama opažanja. Pokazalo se da su prave staze planeta mnogo zamršenije. U neku ruku Kopernikova nauka zapada u krizu. Na temelju golemog rada, kako svojeg, tako i Tiho de Braheovog dugogodišnjeg opažanja i proučavanja, Kepler dolazi do rezultata da staze planeta nisu kružnice, već elipse — krivulje ovima vrlo srodne. U žarištu elipse nalazi se Sunce, spojnica planeta i Sunca u jednakim vremenima opiše jednake plohe, a kvadrati ophodnih vremena odnose se kao kubusi velikih poluosi. U ta tri zakona obuhvaćeno je sve opažanje toga doba. Mi ćemo se ovdje, makar i u kraćim crtama, upoznati s genijalnom Keplerovom metodom pronalaženja tih zakona.

Promatramo li sa Zemlje nikada ne vidimo pravi položaj nekog planeta, već samo u kom se pravcu on s vremena na vrijeme vidi sa Zemlje, koja i sama izvodi gibanje oko Sunca nepoznate vrste. Kepler je uvidio da bi trebalo najprije pronaći gibanje same Zemlje. Otkriti to gibanje bilo bi naprosto nemoguće, kad bi postojala samo Zemlja, Sunce i zvijezde stajačice, a ne bi bilo drugih planeta. U tom slučaju moglo bi se ustanoviti samo prividno gibanje Sunca prema zvijezdama stajačicama, naime da svi pravci Zemlja-Sunce leže u čvrstoj ravnini prema tim zvijezdama i da prividna brzina Sunca u području tih zvijezda nije u svako doba godine jednaka, ali da je uvijek jednaka kad dođe Sunce u isti položaj prema zvijezdama. Drugim riječima, da je brzina rotacije spojnice Zemlja-Sunce, uvijek jednake veličine kad Sunce dolazi u isti položaj prema zvijezdama stajačicama (pravac pokazuje prema istoj zvijezdi stajačici). Prirodna je dakle zbog toga bila pretpostavka, da je putanja Zemlje zatvorena. Ali, kako ćemo sada vidjeti, ipak je bio ogroman problem s kojim se je Kepler suočio u traženju pravog oblika te putanje, pravog oblika staze. Pomoću planeta Marsa, čije se je vrijeme ophoda oko Sunca (trajanje Marsove godine) poznavalo, Kepler je uspio i to najprije empirijski da otkrije stazu Zemlje.



Sl. 1.

Uzmimo, da se u nekom momentu Sunce, Zemlja i Mars nalaze na jednom istom pravcu. U taj momenat gledamo li Mars sa Zemlje, vidimo ga u određenom položaju, recimo P, među zvijezdama stajačicama (sl. 1.). Zabilježimo taj položaj u zviježđu. Nakon izvjesnog vremena (jedne Marsove godine), Mars će opet doći u taj položaj, ali će Zemlja biti na drugom mjestu svoje putanje, recimo u točki Z'. Uzmemo li SM kao stalnu, (inače proizvoljno veliku) osnovicu, budući da se kutovi α' i β' daju mjeriti, možemo konstruirati trokut SMZ'. Tako je određen Z', jedan položaj Zemlje u taj čas, naime jedna točka njezine staze. Nakon slijedeće Marsove godine, Mars opet dolazi u taj položaj, dok Zemlja dolazi u neki drugi položaj, recimo Z''. Na isti način odredimo i taj položaj, dakle još jednu točku Zemljine staze i t. d. Kad je dobio dovoljan broj točaka staze, nastalo je pitanje o kakvoj se tu krivulji radi, kakvih je svojstava ta krivulja. Trebalo je pretpostaviti krivulju izvjesne zakonitosti, a onda na ogromnom materijalu ispitivati. Ako se nije slagalo trebalo je pretpostaviti neku drugu krivulju i opet ispitivati, dok se napokon nije ustanovilo da mora biti elipsa. Da su staze i drugih planeta elipse, Kepleru u principu sada nije bilo teško pokazati, jer je poznavao u svako doba pravi položaj Zemlje. Šta više za pristalice Kopernikova sustava to je bilo i razumljivo. No ipak, recimo da se radi o Marsovoj putanji. Uzmimo da se Mars u određeni momenat nalazi u točki M, a zemlja u Z (sl. 2.). Kako odrediti njegov pravi položaj u taj čas? Tim položajem određen je kut α, dakle i pravac ZM. Nakon



Sl. 2.

jedne Marsove godine on dolazi opet u taj položaj, dok će Zemlja biti u nekom drugom položaju, recimo u Z'. Položaj Marsa jednoznačno je određen sjecištem pravca ZM i $Z'M$. Tu se pruža mogućnost, da već u toku jedne Marsove godine dobijemo njegovu stazu. Da su staze planeta elipse bio je Keplerov prvi i najvažniji zakon. Što se tiče II. Keplerovog zakona, Kepler je zaista mjerio plohe što ih spojnica planet—Sunce u jednakim vremenima, na pr. za mjesec dana, opiše i našao da su površine tih ploha jednake. Napokon godine 1618. dolazi na ideju, da nađe kvadrate, kubuse i t. d. duljina velikih osi elipsa, što ih opisuju pojedini planeti. To isto učinio je i s vremenima ophoda pojedinih planeta i primijetio da kvadrat vremena ophoda podijeljen s kubusom duljine velike poluosi ima istu vrijednost za svaki pojedini planet. Primijetimo ovdje, da Kepler nije poznavao prave udaljenosti između pojedinih planeta i Sunca, dakle ni pravu udaljenost Zemlje od Sunca. Te su mnogo kasnije određene. On je poznavao samo relativne udaljenonsti u odnosu na udaljenost Zemlje od Sunca, kao jedinične udaljenosti.

Ova tri zakona, koja odražavaju čudesnu harmoniju u gibanju planeta oko Sunca u jednoj vrlo kratkoj i preciznoj formi, ipak ne zadovoljavaju princip kauzaliteta (uzročno shvaćanje toga kretanja). Tim zakonima nedostaje tumačenje uzroka i veza, kojima su posljedica baš takva gibanja. Ti zakoni odnose se na gibanje u cjelini, a ne na to kako iz jednog stanja gibanja nastaje slijedeće. To su tri matematski formulirana nezavisna pravila bez unutarnje veze.

Što je to, što po tako jednostavnim zakonima ravna gibanjem planeta, kakva je to sila, što proizvodi takva gibanja, bilo je pitanje, koje je lebdjelo i pred Keplerom gotovo cijeli njegov život. Tek Isaacu Newtonu je uspjelo, da riješi taj problem. Newton si je postavio zadatak da odgovori na pitanje postoji li možda neki zakon koji bi nam omogućio, da iz poznavanja stanja gibanja (položaja i brzine) planeta u jedno vrijeme (momenat), izračuna njegovo stanje gibanja za bilo koji momenat unapred ili unazad. Takvi zakoni nazivaju se diferencijalnim za razliku od integralnih, kao što su u ovom slučaju Keplerovi zakoni. Tom veleumu, koji je mehaniku postavio na čvrste osnove (sjeti se triju osnovnih zakona-aksioma mehanike) bilo je jasno da takav zakon mora postojati. Ali matematika njegova vremena nije bila na takvoj visini, da bi mu omogućila da to izvede. Morao je posegnuti za novom metodom, otkriti novu, tzv. infinitezimalnu metodu, temelj svekolike moderne matematike. »Možda je to,« kaže Einstein, »najveći misaoni korak, koji je ikada jedan čovjek mogao da napravi.«

Na osnovu sistematske analize Keplerovih zakona, Newton u astronomiju uvodi silu kao uzrok. Kako je poznato, matematska formulacija te sile (zakona, inače poznatog pod imenom zakon opće gravitaoije) dana je izrazom:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

gdje je M masa jednog (obično centralnog) tijela, m masa drugog tijela, r njihova međusobna (centralna) udaljenost, a G t. zv. konstanta gravitacije. Kako se vidi uzajamno djelovanje dvaju tjelesa vrlo jednostavno zavisi o masama tih tjelesa i njihovoj međusobnoj udaljenosti. Veličinu toga djelovanja mjerimo silom, koja se definira kao umnožak mase i akceleracije. Poznavanjem sile možemo izračunati akceleraciju. Kako se razabire akceleracija planeta ima smjer prema Suncu, a njena veličina obrnuto je razmjerna kvadratu udaljenosti planeta od Sunca. Lako se razabire, da ovako dinamičko tumačenje gibanja, sadrži u sebi strogi princip kauzalnosti. Poznavanjem položaja možemo izračunati uzajamnu silu, dakle i akceleraciju. Poznavanjem prave brzine, možemo za svako tijelo izračunati pomak u

slijedećem, gotovo beskonačno malom djeliću vremena, a početnom akceleracijom brzinu, koju će tijelo imati na kraju tog djelića vremena. Dakle na kraju tog djelića vremena opet poznajemo položaj i brzinu za svako tijelo. Nastavljajući tako dalje, možemo, bar u principu, za svako vrijeme unaprijed (a i unazad) izračunati položaj i brzinu tih dvaju tjelesa. Specijalno, ako jedno tijelo ima mnogo veću masu od drugoga, a početna mu je brzina nula, možemo bar za jedno relativno kraće vrijeme uzeti, da se njegov položaj nije osjetno promijenio. Onda će samo manje tijelo izvoditi gibanje i to baš tako, da ćee njihova spojnica (radijvektor) u jednakim vremenima opisivati jednake plohe,[1] a staza gibanja, ako je zatvorena, mora biti nužno elipsa. Što se tiče III. Keplerova zakona, nalazi se da je

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

gdje je *a* velika poluos elipse, a *T* vrijeme ophoda. Dodajmo da se vrijednost desne strane potpuno slaže s iskustvom, naime s omjerom do kojeg je došao Kepler astronomskim opažanjem. »Savršeno slaganje motrenja i teorije bio je najveći triumf Newtonove mehanike« (I. Supek).

Na kraju primijetimo kako nam se to sve kroz školu ipak čini jasnim i razumljivim, da si teško možemo i predočiti smionost i veličinu Newtonove ideje, da je gibanje planeta oko Sunca shvatio kao padanje tijela na Zemlju i da se ta gibanja zbivaju pod djelovanjem jedne iste univerzalne sile, sile teže, odnosno gravitacije iz iskustva nam tako dobro poznate. Ne samo to. Rezultati dobiveni proučavanjem gibanja dvojnih zvijezda nedvojbeno govore, da taj zakon vrijedi za cijeli svemir.

Kako nastaju električni naboji u grmljavinskom oblaku

Božena Volarić, Zagreb

Svojom veličanstvenom, a istodobno i zastrašujućom pojavom grmljavinski procesi oduvijek su privlačili ljudski um i budili u njemu interes, da odgoneta tajnu njihova postanka. Stoga nije čudo, što su se kroz decenije mnogi istraživači iz raznih zemalja ogledali na tom polju i tražili uzrok ove najimpozantnije prirodne pojave. Iako se dosta rano, već 1699. god. javila misao, da munja u biti predstavlja veliku električnu iskru, ipak se ta slutnja potvrdila tek sredinom 18. stoljeća. Tim otkrićem učinjen je prvi korak u istraživanju električnih procesa u atmosferi. Nedugo iza toga spoznalo se, da u prirodi pored grmljavinskih, postoje još i neke druge električne pojave. Međutim sve ostale prirodne električne pojave za razliku od grmljavinskih, odvijaju se sasvim nečujno, bez sjaja i buke. Radi toga ih ljudska osjetila nisu u stanju zapaziti, već samo specijalni, vrlo osjetljivi instrumenti. Tako na pr. kroz atmosferu neprekidno teče vertikalna električna struja. Srednja gustoća ove struje iznosi $3{,}2 \cdot 10^{-16}$ po cm^2. Osim toga u atmosferi stalno postoji i električno polje, koje je pri normalnim uvjetima usmjereno prema površini Zemlje. Kao srednja vrijednost jakosti električnog polja atmosfere uzima se 130 V na jedan metar.

Prema današnjim uspjesima nauke na području atmosferskog elektriciteta grmljavinski se procesi smatraju izvorom i pokretačem većine električnih pojava u atmosferi. Sjedište grmljavina nalazi se redovno u olujnom oblaku, koji se prema internacionalnoj klasifikaciji naziva cumulonimbus. Ovaj se oblak odlikuje veoma

[1] Vidi na primjer ANTIĆ—BREČEVIĆ: FIZIKA ZA VI. RAZRED GIMNAZIJE (str. 207.)

snažnim vertikalnim razvojem. Baza mu se obično nalazi na visini od 500—1 000 m iznad tla, dok vrh oblaka može zahvatiti granicu troposfere t. j. visinu od 9 000 do 12 000 m.

Unutar cumulonimbusa odigravaju se vrlo burni procesi, koji stvaraju velike količine električnih naboja. Grmljavinski oblak se može prema tome shvatiti kao električni generator. Podaci klimatološke statistike o čestini grmljavinskih pojava pokazuju, da se svakog sata prosječno na cijeloj Zemlji zbiva oko 1 800 grmljavina, dok svake sekunde zabljesne u atmosferi oko 100 munja. Iz toga izlazi, da grmljavinski generator gledan u svjetskom razmjeru djeluje neprekidno, bez odmora i predaha. Grmljavinske pojave dakle pored toga što stvaraju, još i održavaju električno stanje atmosfere. Stoga se može reći, grmljavine su ne samo najizrazitiji, već i najvažniji dio električnog zbivanja u atmosferi.

Sada, nakon što je prikazana uloga grmljavina u atmosfersko-električnim procesima, trebalo bi opisati kako dolazi do stvaranja grmljavinskog elektriciteta. Nažalost se još ni danas usprkos tolikih istraživanja ne može dati sasvim točan i određen prikaz, jer je vrlo teško i pogibeljno vršiti direktna ispitivanja unutar cumulonimbusa, a naročito za vrijeme oluja. Ipak je uspjelo proučiti prilike, koje vladaju u ovom gigantskom oblaku. Praćen je njegov razvoj od samog početka nastajanja pa kroz snažno bujanje do konačnog raspadanja. Pokazalo se, da unutar cumulonimbusa djeluje više procesa, koji proizvode električne naboje. Teško je reći, koji je od njih glavni proizvođač grmljavinskog elektriciteta, jer su u tom pogledu skoro svi jednakopravni. Svaki od njih mogao bi bez daljnjega preuzeti glavnu ulogu kod proizvodnje električnog naboja. Pojedini su istraživači promatrali ove procese sa raznih gledišta i glavninu proizvodnje pridavali raznim procesima. Na taj način nastalo je više teorija o stvaranju grmljavinskog elektriciteta. Najpoznatije među njima iznijet ćemo ovdje u kratkim crtama.

Jedna od najstarijih jest *Wilson-Gerdienova teorija kondenzacije,* koja je dugo vremena igrala veliku ulogu kod tumačenja početne faze grmljavinskog naboja. Kao osnova za ovu teoriju poslužilo je Wilsonovo otkriće, da u potpuno čistom zraku kondenzacija vodene pare može nastupiti na ionima, t. j. električki nabijenim česticama. Znači, ioni u ovom slučaju djeluju kao kondenzacione jezgre. Međutim kondenzacija na ionima može nastati tek kod izvjesnog prezasićenja vodene pare. Stupanj prezasićenosti ovisi o predznaku iona. Negativni ioni zahtjevaju relativnu vlagu oko 400%, dok pozitivni oko 600%. U uzlaznoj struji zraka, koja je karakteristična za cumulonimbus, stvore se najprije negativno nabijene kapljice. Uslijed svoje težine one zaostaju u dizanju iza pozitivnih iona ili čak počinju padati. Kapljice s pozitivnim nabojem nastaju kod još jačeg stupnja prezasićenosti vodene pare t. j. istom u većim visinama. Prema tome gornji dio oblaka sačinjavaju pozitivno nabijene kapljice, dok se baza oblaka sastoji od negativno nabijenih kapljica. Ako su meteorološki uvjeti povoljni, što znači čist, vlažan i dovoljno ioniziran zrak uz jaka vertikalna strujanja može po ovoj teoriji doći do znatnog nagomilavanja istoimenog elektriciteta u pojedinim dijelovima oblaka. Uslijed toga se stvore ogromne razlike potencijala, koje tada vode do električnog pražnjenja — do munja i gromova.

Ova je teorija konačno zabačena, jer zahtijeva zrak bez kondenzacionih jezgara ili drugim riječima: zrak potpuno očišćen od prašine, dima, čađe, kristalića soli i ostalih higroskopskih čestica. Međutim taj uslov gotovo nikada nije ispunjen, kako pokazuju mnogobrojna mjerenja vršena na raznim visinama u atmosferi.

Godine 1909. pojavljuje se *Simpsonova teorija,* koja postanak grmljavinskog elektriciteta tumači pomoću Lenardova efekta. Kod naglog rasprskavanja kapljica javlja se električki naboj, kako je to doazkao fizičar Lenard. Stoga ova pojava nosi njegovo ime. Uzrok za stvaranje naboja kod rasprskavanja kapljica leži u dvostru-

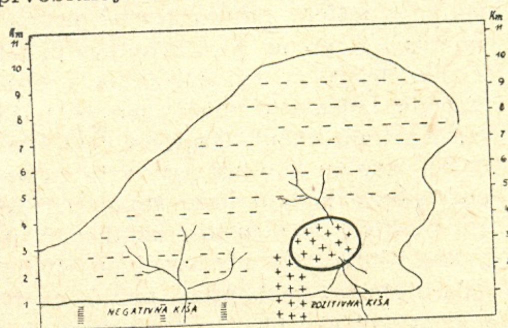
kom električnom sloju kapljice. Svaki mehanički proces kojim se naglo otkidaju sićušne čestice sa površine kapljice izaziva njeno nabijanje. Otrgnute čestice naime odnose sobom naboj iz vanjskog električnog sloja kaplje. Veći ostatak kaplje tada se suprotno nabija, nego što su nabijene sitne, otrgnute čestice. Predznak naboja ovisi o kemijskim svojstvima rasprsnute kaplje. Kod kapljica čiste vode, vanjski električni sloj je negativan, pa su otrgnute sitne čestice negativno električne, dok su krupniji ostaci kaplje pozitivni. Učinak Lenardova efekta očituje se kod vodopada. Zrak je u blizini vodopada negativno električan, jer su u njemu rasprostranjene sitne čestice vode nastale prigodom naglog sudaranja kaplja o krutu podlogu. Stoga se Lenardov efekat naziva još i »efekat vodopada«.

Za burnog vremena, pri snažnom zapljuskivanju valova o obalu također se javlja ovaj efekat. Ali u ovom slučaju sa izmijenjenim predznacima. Vanjski električni sloj na površini kapljice morske vode ima naime obrnuti redoslijed nego kod kapljice čiste vode. Stoga su sitne čestice otkinute s kapi morske vode pozitivno nabijene, pa je i zrak nad morem pozitivno električan. Naprotiv teški ostatak rasprsnute kaplje nosi tada negativan naboj.

Lenardov efekat nastupa i onda, kada su kapljice izložene djelovanju jake struje zraka, koja prolazi mimo njih. Kod toga strujanje ne smije biti jednoliko, jer se Lenardov efekat javlja baš pri naglim promjenama u brzini strujanja. U grmljavinskom oblaku zaista postoje jake, uzlazne struje zraka, koje na mahove struje. Da nastupi Lenardov efekat u oblaku, mora brzina strujanja iznositi najmanje $8\,m/s^{-1}$, a kolebanje strujanja $\pm 3\,m/s^{-1}$. Ispitivanja su pokazala, da strujanje zraka u cumulonimbusu daleko nadmašuje ove granične vrijednosti. Izmjerene brzine vertikalne struje zraka kretale su se od 10—$30\,m/s^{-1}$.

Kada ove struje zraka zahvate kapljicu kiše, koja pada kroz atmosferu, potpuno je izobliče. Kapljica ponajprije poprimi oblik šešira. Gornji dio kapljice se pri tome teoma stanji. Struja, koja je na čas bla oslabila, ponovno ojačana naleti u slijedećem trenutku svom žestinom na kapljicu i probije njen gornji, istanjeni dio. Uslijed tog udarca odozdo kapljica se rasprsne u mnoštvo sitnih, negativno nabijenih čestica vode, koje uzlazne struje odnose sobom u visinu. Veći, pozitivni ostatak kapljice ostaje uz bazu oblaka ili pada prema tlu.

Iz ove teorije izlazi dakle, da uzlazne struje ne samo dovode do stvaranja električnog naboja na kapljama, već one i prostorno odvajaju oba elektriciteta u zraku. U gornjem dijelu oblaka nalaze se negativno nabijene malene kapljice, koje su ovamo dopremile uzlazne struje zraka, dok su uz bazu oblaka smještene veće kapi s pozitivnim nabojem. Tako se prema prvobitnoj zamisli Simpsona stvara bipolaran oblak, koji prikazuje slijedeća slika.

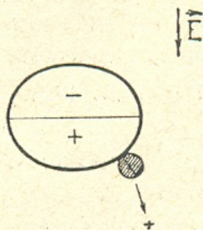


Sl. 1. Skica cumulonimbusa s električnim nabojima i munjama.

Između pojedinih područja u kojima su koncentrirane velike količine elektriciteta, kao i između oblaka i površine Zemlje stvaraju se napetosti potrebne za izbijanje električne iskre. Tako dakle nastaju munje, koje izjednačuju te napetosti.

Pomoću ove teorije može se sasvim dobro rastumačiti naboj kod jakih kiša i pljuskova, što i eksperimenti potvrđuju, ali nedostaje tumačenje za jednolike i mirne kiše. Njihov naboj naprotiv veoma lijepo objašnjava *Elster-Geitelova teorija influencije*, koja se pojavila 1913. godine. Ova teorija izgrađena na činjenici, da se u atmosferi stalno nalazi električno polje. Kapljice kiše na svom putu kroz atmosferu izlo-

žene su djelovanju tog polja, te postaju električno polarizirane. Pri normalnom smjeru polja influencira se negativni naboj na gornjoj polovini kapljice, dok se na donjoj polovini smjestio naboj pozitivnog predznaka. Radi svoje različite veličine kapljice kiše padaju različitim brzinama. Veće padaju brže, dostižu manje i s njima se sudaraju. Prilikom sudara jedan dio influenciranog naboja s donje strane veće kaplje prelazi na manju kapljicu, koja ga nakon odbijanja od veće kapi odnosi sa sobom.



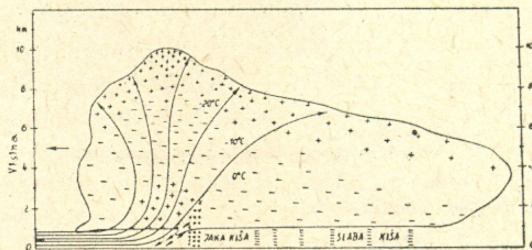
Sl. 2. Odvođenje električnog naboja s veće kaplje nakon sudara

Kapljice se na taj način različito nabijaju: veće negativno, a manje pozitivno. Zbog gravitacione sile one se međusobno sve više udaljuju. Dolazi dakle do prostornog odvajanja različito nabijenih kapljica. Manje, koje sporije padaju sve više zaostaju ili ih čak zračne struje otpremaju u gornje dijelove oblaka. Za to se vrijeme krupnije kapi spuste već znatno niže i zapreme donji dio oblaka. Takova prostorna raspodjela električnog naboja vodi do pojačanja već postojećeg električnog polja u atmosferi. Oblak prema tome djeluje kao mašina za influenciju.

Schumann je pobliže ispitao pojave, koje nastaju prilikom sudaranja različito velikih kapljica u električnom polju. Na temelju tih eksperimenata on je nešto dotjerao i izmijenio Elster-Geitelovu teoriju influencije. Prema Schumannu kod sudara može nastati dvojaka situacija, što ovisi o veličini manje kapljice. Ako je njen promjer manji od $1/2$ mm, tada se obje kaplje sliju u jednu bez ikakova električnog efekta. Naprotiv, u koliko je promjer manje kapljice veći od $1/2$ mm, pri sudaru se na gornjoj strani veće kaplje odcijepe malene čestice, koje sa sobom odnose influencirani naboj. Pri normalnim uvjetima taj je naboj negativan. Veći ostatak kaplje nosi tada pozitivan naboj. Schumann je ovaj proces fotografirao, a Mache ga je za vrijeme oborina direktno motrio.

Međutim ni ova teorija nije potpuno zadovoljila. Godine 1929. pojavila se Wilsonova teorija influencije, koja se također temelji kao i Elster-Geitelova teorija na djelovanju već postojećeg električnog polja u atmosferi. I u ovom slučaju su kapljice kiše ili oblaka električno polarizirane. Stoga Wilson pretpostavlja, da će polarizirane kapljice elektrostatskim silama djelovati na atmosferske ione, kojih uvijek ima u atmosferi u većim ili manjim količinama. Ioni putuju kroz atmosferu pod utjecajem njenog električnog polja. Smjer kretanja ovisi o predznaku iona. Pozitivni se ioni pokreću u smjeru električnog polja, t. j. oni pri normalnom električnom polju atmosfere putuju prema površini Zemlje. Negativni ioni idu u suprotnom smjeru, t. j. prema gore. Kapljice padajući kroz atmosferu susreću ione obaju predznaka. Negativni ioni dolaze im u susret, pošto se oni uspinju. Kapljice ih elektrostatskim silama privlače, jer se na njihovim donjim stranama nalazi pozitivni influencirani naboj. Pozitivne ione naprotiv odbijaju, kada ih u padu sustižu. Međutim, ako su kapljice kiše vrlo malene, s radiusom oko 1/100 do 1/1000 mm, tada one sporije padaju nego što se pozitivni ioni pokreću prema Zemlji. Sada dakle ovi pozitivni ioni sustižu kapljice, koje ih uz ovakove okolnosti privlače, pošto su prema njima okrenute gornjom stranom na kojoj se nalazi negativni influencirani naboj. Malene se kapljice prema ovoj teoriji pozitivno nabijaju, a veće negativno. Polaritet oblaka bio bi prema tome obrnut nego što kaže prva koncepcija Simpsona o rasporedu naboja. U gornjim dijelovima oblaka sada bi bio koncentriran pozitivan naboj, a uz bazu oblaka negativan naboj. Danas se uglavnom prihvaća raspodjela električnog naboja u cumulonimbusu prema Wilsonovom gledištu uz neke male nadopune.

Ipak se ni ova teorija nije u potpunosti održala, premda je među starijim, naprijed iznesenim teorijama izgledala kao najvjerojatnija. Međutim svim starijim istraživačima nedostajali su podaci iz treće dimenzije, jer su u to doba visinska istraživanja bila prilično oskudna. Nakon prolijetanja kroz grmljavinski oblak s jedrilicama i avionima dobila se sasvim druga slika o procesima, kao i o rasporedu električnog naboja unutar cumulonimbusa. Pokazalo se zapravo, da je oblak tripolaran, kako je već i Simpson bio ustanovio pri kraju svojih istraživanja. Novije gledište o strukturi grmljavinskog oblaka u pogledu smještaja električnog naboja prikazano je na slijedećoj skici.



Sl. 3. Raspodjela električnih naboja i struja zraka u cumulonimbusu

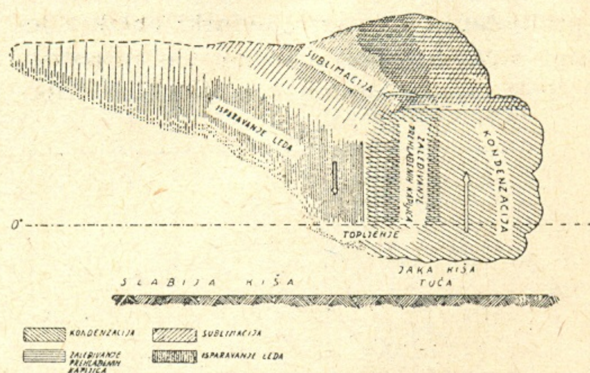
Granično područje između gornjeg pozitivnog i donjeg negativnog naboja leži oko izoterme —10° C ili kod još nižih temperatura. Istraživanja su nadalje pokazala, da se u ovom području odvijaju vrlo aktivni procesi elektrizacije. Ova činjenica naprosto je dovela u pitanje sve dotadašnje teorije o postanku grmljavinskog elektriciteta, jer su one sve redom zahtijevale prisutnost vodene faze t. j. kapljica vode. Sada je naprotiv prevladalo mišljenje, da prva uočljiva manifestacija električnog naboja u oblaku počinje sa stvaranjem kristala leda.

Dotadašnje teorije nisu se mogle dovesti u sklad s novim rezultatima istraživanja. Tako nastaju nove teorije, koje traže vezu između stvaranja oborina i postanka grmljavinskog elektriciteta.

Godine 1940. pojavljuje se *Findeisenova »teorija krhotina leda«*, koja je izgrađena na temelju proučavanja mikrofizikalne strukture oblaka. Davno poznata činjenica, da postoji uska veza između nastajanja oborina i početnih procesa elektrizacije u grmljavinskom oblaku, potakla je Findeisena, da u tom pravcu usmjeri svoja istraživanja. Nakon mnogobrojnih eksperimenata uspjelo mu je dokazati, da su promjene agregatnih stanja vode popraćene električnim efektom. Pri nastajanju leda uvijek se javlja pozitivni električni naboj bez obzira da li led nastaje sublimacijom, t. j. direktnim prelazom vodene pare u led, ili naglim smrzavanjem prehlađenih kapljica vode pri dodiru s ohlađenim tijelom. U ovom posljednjem slučaju ustanovljeno je naročito jako pozitivno nabijanje. Odnos nabijanja pri sublimaciji i smrzavanju prehlađenih kapljica stoji u omjeru 1 : 1000. Isparavanje leda, t. j. direktan prelaz leda u vodenu paru, također je popraćeno električnim djelovanjem, ali suprotnog predznaka nego u prva dva slučaja. Sada se naime javlja negativni naboj. Jačina nabijanja i opet je znatno jača nego kod sublimacije, tako da stoji u omjeru 10 : 1. Naprotiv proces kondenzacije, kao ni topljenje leda, nisu vezani uz ovu pojavu električnog naboja.

Nabijanje pri navedenim procesima Findeisen objašnjava otkidanjem malih krhotina s površine ledene čestice. Pri tome se raskida dvostruki električni sloj na čestici leda. Findeisen kaže, da se te krhotine uz povoljno osvjetljenje mogu i prostim okom vidjeti. Kod sublimacije procijenjen je broj otkinutih krhotina na oko 30 u sekundi. Smrzavanjem prehlađenih kapljica na česticama leda stvara se nejednoliki plašt leda, što izaziva unutrašnje mehaničke napetosti. Bržem zaleđivanju kapljica odgovaraju veće mehaničke napetosti unutar ledenog plašta. Uslijed tih napetosti još lakše se mogu otkidati krhotine s površine ledene čestice. Ipak se otkidanje tih krhotina nije moglo ustanoviti optičkim putem.

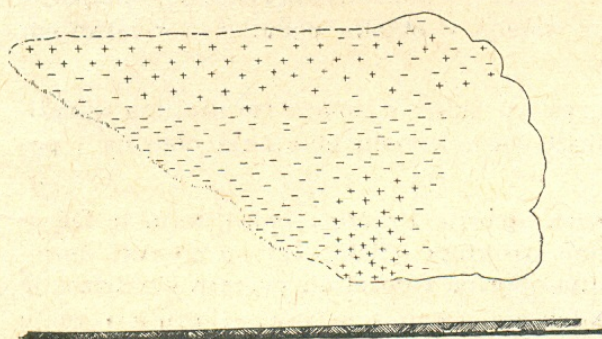
Sva tri procesa: sublimacija, isparivanje leda, a naročito naglo zaleđivanje prehlađenih kapljica, dešava se u velikoj mjeri u cumulonimbusu. Može se dakle s pravom pretpostaviti, da su ovi procesi od izvanrednog značenja za jako i naglo stvaranje električnih naboja u oblaku.



Sl. 4. Mikrofizikalni razvoj nesimetrično izgrađenog cumulonimbusa

Na slijedećoj skici prikazano je grupiranje procesa u pojedinim dijelovima oblaka.

Iako se pri tim procesima stvaraju različito nabijene čestice, oblak kao cjelina ostaje električki neutralan sve dotle, dok čestice nisu prostorno odvojene. Tek nakon međusobnog odvajanja čestica, što je posljedica njihove različite brzine padanja odnosno njihove različite mase, koncentrira se električni naboj istoga predznaka na određeni prostor i oblak se električki nabija. Raspored naboja u cumulonimbusu izvodi Findeisen iz mikrofizikalne građe oblaka, kako se može vidjeti na slijedećoj skici.


Sl. 5. Električna struktura nesimetrično izgrađenog cumulonimbusa

U području kondenzacije praktički i nema naboja. Električno nabijanje u oblaku započinje na mjestu, gdje u uzlaznoj struji zraka nastaju prve čestice leda i to bez obzira da li su one nastale sublimacijom ili zaleđivanjem prehlađenih kapljica. U početku, ove čestice leda zadržavaju se u istom dijelu oblaka zajedno sa sitnim krhotinama, koje su se otkinule s njihovih površina. Čestice leda su naime i same tako malene, pa uglavnom lebde u zraku. Rastom tih čestica uvjetovano je njihovo sve brže padanje, a time i prostorno odvajanje od negativno nabijenih krhotina. U onom dijelu oblaka, gdje se odvija proces zaleđivanja prehlađenih kapljica mogu čestice leda narasti do veličine zrna solike i sugradice. Tada zbog njihovog brzog vertikalnog padanja može naglo nastupiti prostorno odvajanje od krhotina leda. Na tom području su dakle uz bazu oblaka sakupljene velike čestice leda, pa tu prevladava pozitivan naboj. Iznad njih naprotiv zaostale su krhotine nastale otkidanjem iz ledenog plašta zaleđenih prehlađenih kapljica, pa je u tom prostoru koncentriran negativan naboj.

U najgornjim dijelovima oblaka sa strane uzlazne struje nalaze se većinom čestice leda nastale sublimacijom, stoga nose pozitivan naboj. Silazna struja zraka doprema ove čestice u niže dijelove oblaka, gdje zrak nije zasićen vodenom parom. Ove čestice leda započinju se ovdje isparavati. Isparavanjm gube svoj prvobitni pozitivni naboj, jer je isparavanje leda jače električno djelotvorno, nego proces sublimacije. Uslijed toga je donji dio oblaka negativno nabijen.

Zaleđivanjem prehlađenih kapljica na česticama leda, koje padaju iz većih visina, stvaraju se zrnca sugradice i tuče, što je popraćeno jakim električnim nabijanjem. Ali vertikalne struje zraka mogu zahvatiti ta zrnca i ponovno ih otpremiti u gornje dijelove oblaka. Zrnca dakle mogu nekoliko puta proputovati kroz oblak.

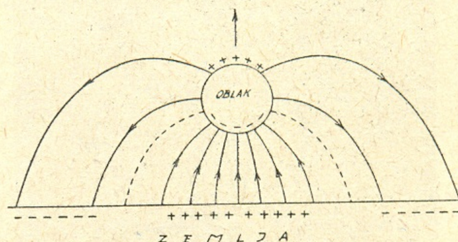
Na tim putovanjima zrnca postaju sve veća, ali i proces elektrizacije sve jači, tako da je baš taj proces neobično aktivan u grmljavinskom mehanizmu. Područje, u kojem se odvija zaleđivanje prehlađenih kapljica, može se dakle smatrati žarištem grmljavinskih pojava. Prema Findeisenu to područje nalazi se između donjeg pozitivnog i gornjeg negativnog naboja u oblaku.

Nedugo zatim t. j. 1944. godine pojavljuje se *Frenkelova teorija*, koja na sasvim nov i neuobičajen način pokušava objasniti nastajanje grmljavinskog elektriciteta. Frenkel je naime poznate činjenice iz elektrokemije koloidnih otopina prenio na atmosferske aerosole. Sićušne, mikroskopske čestice prašine, dima, čađe, soli, kao i sitne kapljice magle i oblaka, koje su raspršene u zraku zovu se »aerosoli«. Frenkel je izgradio svoju teoriju zgodnim povezivanjem činjenica iz elektrokemije s davno otkrivenim ionizacionim stanjem atmosfere. Kod toga on polazi od slijedećih pretpostavki:

1. da je zrak ioniziran, i
2. da voda posjeduje veći afinitet prema negativnim nego prema pozitivnim ionima, bez obzira da li se voda nalazi u krutoj ili tekućoj fazi.

Prva pretpostavka je u duhu ranijih istraživanja na području atmosferskog elektriciteta. U atmosferi se zaista nalazi izvjesna količina iona, koja nije konstantna veličina, već zavisi o mjestu i vremenu. Ioni nastaju djelovanjem kozmičkih zraka, radioaktivne materije sadržane u tlu i u zraku, a u većim visinama i ultraljubičastim zrakama Sunca. Pored tih glavnih ionizatora atmosfere ima još nekoliko sporednih, koji neznatno utječu na sveukupnu bilancu ionizacije atmosfere. Njihovo djelovanje nosi uglavnom lokalno obilježje.

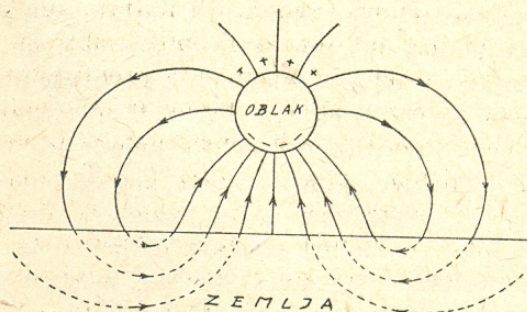
Druga pretpostavka znači novost za atmosferski elektricitet i prikazuje vlastito gledište Frenkela na atmosfersko električna zbivanja. U analogiji na koloidne otopine Frenkel zamišlja ionizirani zrak kao elektrolitičku otopinu, dok u zraku raspršene kapljice vode ili kristaliće leda označuje kao koloidne čestice. Pri elektrolizi koloidnih otopina ioni se odlažu na koloidne čestice, pa se može zamisliti da se na sličan način negativni atmosferski ioni odlažu na elemente oborine. Dakle nabijanje kapljica odnosno kristalića leda jest neka vrst procesa adsorpcije. Zbog većeg afiniteta vode prema negativnim ionima samo oni dolaze u obzir za nabijanje elemenata oborine. Pod djelovanjem sile teže elementi oborine, koji su se na taj način negativno nabili, polagano vertikalno padaju. Pozitivni ioni naprotiv ne padaju, već zaostaju u gornjim dijelovima oblaka, jer na njih gotovo i ne djeluju sila teža zbog njihove malene mase. Oblak je sada električno nabijen i to gornji dijelovi pozitivno, a donji negativno. Na taj način oblak postaje »generator«, koji tek sada uspostavlja električno polje u atmosferi. Frenkel smatra, da je Zemlja u cjelini inače električki neutralna i tek nakon stvaranja ovakovog oblačnog generatora influencira se električni naboj na njezinoj površini. Na tlu ispod oblaka influencira se pozitivan, dok se naokolo, sa strane, javlja negativan naboj. Slijedeća slika prikazuje polje oblačnog generatora. Zbog pojednostavljenja uzima se, da oblak ima kuglasti oblik.



Sl. 6. Električno polje kuglastog »oblačnog« generatora

Nakon formiranja električnog polja u atmosferi ioni se pod njegovim djelovanjem započinju gibati. U atmosferi se na taj način uspostavlja sistem struja, kako prikazuje slijedeća slika.

Iz Frenkelovih teoretskih razmatranja proističe, da radna sposobnost oblačnog generatora ne ovisi o veličini ili broju kapljica, već samo o količini vode sadržane u oblaku. Frenkelova teorija može se prema tome primijeniti na oblake nejednolike strukture, a cumulonimbus je upravo njihov tipičan predstavnik. Izgrađen je od različito velikih elemenata, kojih je veličina vremenski vrlo promjenljiva zbog burnih procesa u oblaku. Na kraju bi se još moglo reći: nagomilavanje vode u oblaku, kao i povećana vodljivost atmosfere uvjetuje mjestimično snažno pojačanje električnog polja, što vodi do izbijanja munja i gromova.



Sl. 7. Sistem struja »oblačnog« generatora

(Svršit će se)

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Filip V. Filipović matematičar i revolucionar

Ako se danas u retrospekciji pogleda delo Filipa Filipovića od dana kada je u čačanskoj gimnaziji upoznao prve so-



cijalističke ideje Svetozara Markovića, preko ilegalnog rada, pa do objavljivanja zadnjih prikaza iz metodike nastave matematike, pada u oči da su vaspitanje mladih generacija i revolucionaran rad dva elementa koji sačinjavaju njegov čovečiji interes. Dve maksime ispunjavaju značajno delo Filipa Filipovića: Istina društva — revolucionarnost i pedagoško delovanje kao matematičara. Nikada jedna bez druge, uvek kolektivno prisutne u svakom njegovom radu. Socijalistička misao mlade radničke klase i inteligencije u zemlji, prvi kontakti sa marksističkom literaturom bili su prvi potstrek ali i stalni stimulans. Interes i ljubav za socijalističke ideje, odanost egzaktnim naukama, kao i prva upoznavanja sa infinitezimalnim računom datira ne tako davno, krajem XIX veka, kada je skromnim izgledom jedan svršeni gimnazijalac malene Srbije, danima i mesecima, godinama, dugo i dugo posmatrao obale Neve — gledao rađanje novog sveta.

Petrograd ... Marksistički kružoci naprednih studenata; Rusija 1905 godine.

Ti prvi, ali nikada nezaboravni doživljaji u kružocima studentske omladine Petrogradskog univerziteta, otkrivanje i saznavanje mnogih misli marksizma, ostaće kao prizvuci koji će trajno pratiti revolucionarno stvaralaštvo Filipa Filipovića.

Filip Filipović je pošao od čoveka. Bila je to serija ranih prikaza u sindikalnoj štampi i istupanja na pedagoškim sednicama nastavnika matematike.

Zatim su se, jedan za drugim smenjivali prikazi, metodološke kompozicije nastave matematike. Ta prva samostalna istupanja sa potpuno novim koncepcijama nastave pokazala su tematsku raznovrsnost, kao i reformatorski dar.

Filip Filipović spada u red nastavnika matematike koji pred sebe postavljaju samo one probleme i zadatke koje mogu da reše za dobro sredine u kojoj rade. Egzistenciju svog nastavničkog »ja« on ne podređuje klimi vremena ni faktorima koji bi, makar samo i psihološki vršili pritisak; njegova individualnost ostaje slobodna, nezaptivena opterećenjima jednog programa ni tendencije.

Prvih godina XX veka stanje u nastavi matematike bilo je na nivou koji nije pratio savremeni razvitak nauke. Matematika se u školama izučavala u okvirima »Dositijevog liceja«. Ovakvu činjenicu su progresivne snage u nastavi matematike uočavale. Došlo je vreme »kada je u svetu potpuno sazrela misao da nastava matematike pretstavlja jedan veliki anahronizam i da neposredno pretstoji njena korenita reforma«.[1]

Ovakve prilike su dovele do IV Međunarodnog kongresa matematičara (1908 g.) u Rimu, gde je nastava matematike stavljena na oštru kritiku, te Kongres osniva Međunarodnu komisiju sa zadatkom pripremanja i realizacije reforme nastave matematike u svim zemljama.

Mladog nastavnika matematike u Petrogradu, Filipa Filipovića zahvata reformatorski talas. Istupa sa zapaženim saopštenjima u Matematičkom otseku Pedagoškog muzeja Vojnih škola u Petrogradu čiji je bio član. Osnovna teza Filipa Filipovića u reformi škole bila je u neposrednoj vezi sa društvenim zbivanjima u epohi 1905 g. U predgovoru knjige[2] stoji: »Epoha Tolstoja i Deljanova, koja je došla na smenu proleću šezdesetih godina, sa svoje strane ustupila je mesto epohi 1905 god., koja je kroz usta narodne demokratije istakla preku potrebu za korenitim promenama stare škole«.

Filip Filipović je rođen 9. juna 1878 g. u Čačku. Osnovnu školu i gimnaziju završio je u rodnom mestu.

Po završenoj gimnaziji dobija stipendiju i odlazi na Petrogradski univerzitet, gde studira matematiku.

Na univerzitetu se ističe i dobiva solidno znanje. 1904 g. diplomira sa odličnim uspehom na Matematičkom otseku Fizičko-matematičkog fakulteta Petrogradskog univerziteta sa diplomom I stepena.

Kada je počeo da radi u školama Petrograda, Filip Filipović nije zaboravio na svoju domovinu. Sa jednim izgrađenim načinom prilaženja problemima, sa solidnim poznavanjem teorije socijalizma kao i praktičnim revolucionarnim iskustvom (aktivno sudelovanje u revoluciji 1905 g.), Filip Filipović se javlja sa prikazima u sindikalnoj štampi Srbije, kao i ličnom prepiskom sa tadanjim revolucionarima u zemlji.

1912 god. na poziv drugova F. Filipović dolazi u zemlju i postaje sekretar Radničke komore. Ti dani, kada organizaciono prilazi radničkom pokretu, označeni su kao početak konkretnog revolucionarnog delovanja u zemlji.

Kod drugova postaje jako omiljen. Imao je načina da sa svakim sarađuje. Znao je svakog da sasluša i da bude saslušan. Odlikovao se jakom energijom za rad i izrazitom upornošću.

Posle rata dolazi u zemlju (1912 god. bio je prognan u okolinu Beča), gde otpočinje najaktivniji period njegovog revolucionarnog rada. Pristupa organizaciji socijalističke radničke partije — Partije komunista. Na Vukovarskom kongresu 1920 god., gde je pretsedavao, izabran je za političkog sekretara Izvršnog odbora KPJ.

Ovo je period u istoriji Partije kada je ona delovala legalno. Tako, na opštinskim izborima u Beogradu iste godine kada je i održan Vukovarski kongres, F. Filipović je izabran za pretsednika Op-

[1] Olga D. Mitrinović, Filip V. Filipović kao pedagog i metodičar matematike, Nauka i priroda, T. IX. 9, Beograd, 1956, str. 345—353.

[2] V. Mroček — F. Filipović, Pedagogija matematike, Istoriske i metodske studije; Beograd, 1957, str. 313.

štine.[3] Ovaj Opštinski odbor gde su u većini bili komunisti, bio je suspendovan od strane monarhije.

F. Filipović je iste godine bio izabran za poslanika Ustavotvorne skupštine. Zbog atentata na regenta Aleksandra Karađorđevića optužen je za saučesnika i u poznatom procesu protiv komunista god. 1922. bio je osuđen na dve godine zatvora. U Požarevačkoj kaznioni gde je izdržavao kaznu i dalje radi na izučavanju socijalizma i piše poznato delo »Razvitak društva u ogledalu istoriskog materijalizma« na 268 strana.

Po izdržanoj kazni otpočinje ilegalni rad u KPJ. 1924 god. pretstavlja Partiju na kongresu Kominterne u Moskvi. Po završetku Kongresa ne vraća se u zemlju, ostaje u SSSR-u, gde je 1938 god. i umro.

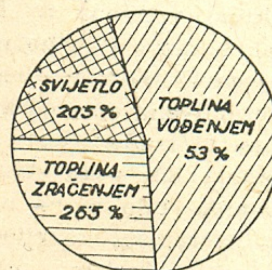
Metodičar i pedagog, revolucionar posebnog temperamenta, zanimljivog i snažnog, F. Filipović pokazuje da se nalazio u punoj revolucionarnoj snazi i zrelosti u idejama reforme nastave matematike; u dobu kada se od njega s pravom očekivalo da revolucionarno iskaže sve ono što se godinama i vremenom taložilo u nastavi matematike.

Samo jedan deo tih očekivanja F. Filipović je ispunio. Prerana smrt sprečila ga je da svoj rad kruniše i viđenjem ostvarene pobede.

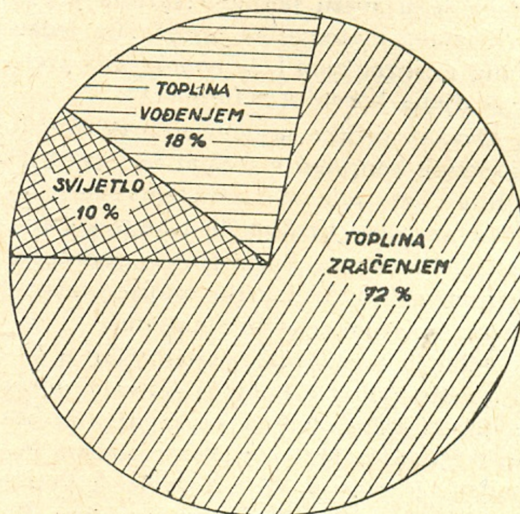
Dragan Trifunović, Beograd

Savremene fluorescentne sijalice

Prošlo je već više od dvadeset godina kako je na svjetskoj izložbi u NewYorku pod motom »The World of Tomorrow« jedna od najzapaženijih senzacija bilo blistavo i raskošno fluorescentno osvjetljenje. Tom događaju prethodio je, a i iza njega se nastavio znatan istraživački rad na fluorescentnoj rasvjeti i njenom praktičnom iskorištenju. Što je potaklo stručnjake da ulože takav trud u ta istraživanja? Odgovor je jednostavan: to je nevjerojatno mala ekonomičnost sijalica sa žarnom niti. Koliko god su one predstavljale ogroman napredak prema plinskom i petrolejskom osvjetljenju, one su bile i ostale, ne izvori svjetlosti, već grijalice. Dok najsavršenija sijalica sa žarnom niti daje tok svjetlosti od 15 lumena po wattu utrošene električne energije, fluorescentna daje oko 70 lumena po wattu, što predstavlja više nego četverostruko poboljšanje. Sva ostala uložena energija troši se na toplinu. Naša slika 1. detaljnije prikazuje raspodjelu električne energije za jednu fluorescentnu sijalicu u poređenju sa običnom.



Fluorescentna sijalica
40W 2100 Lumena



Sijalica sa žarnom niti
150W 2250 Lumena

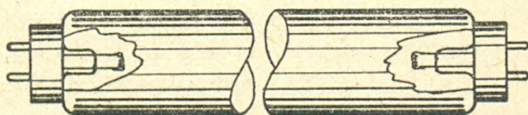
l. 1.

---

[3] Institut za izučavanje radničkog pokreta raspolaže originalnom izbornom plakatom za glasačku kutiju F. Filipovića.

Odmah na početku istraživanja boljih izvora svjetlosti, bilo je jasno, da oni ne smiju biti užarena čvrsta tijela jer sva ona u tom pogledu imaju ista svojstva: velik dio energije zračenja pada na valne dužine izvan vidljivog dijela spektra, većinom na infracrvene zrake. Put je vodio na istraživanja t. zv. »hladne« svjetlosti, koja se javlja kod električnih izbijanja u razređenim plinovima. I prije pojave fluorescentnih svijetiljki bile su poznate neke sijalice na tom principu kao na pr. natrijeve i živine, te neonske reklamne cijevi, ali se one osim izuzetaka nisu upotrebljavale za rasvjetu, jer ne daju bijelu svjetlost. Tek kad je sa »hladnom« svjetlošću povezana pojava fluorescencije došlo se do značajnih rezultata.

Fluorescencija je otkrivena na mineralu fluoritu (CaF_2), prema kojem je dobila i ime, a sastoji se u apsorbiranju svjetlosti manje valne dužine i istovremenom emitiranju svjetlosti veće valne dužine. Osvjetli li se na primjer neka fluorescentna tvar ultraljubičastim, dakle nevidljivim svjetlom, emitirati će ona našem oku vidljivu svijetlost, pa kažemo da tvar fluorescira. Upravo ta pojava iskorištena je u fluorescentnim sijalicama. U njima se pomoću električnog izbijanja u razrjeđenoj živinoj pari dobiva ultraljubičasta svijetlost, kojom se djeluje na sloj pogodnog fluorescentnog materijala. Nakon pretvorbe gore opisanim procesom dobiva se vidljiva svijetlost, koju koristimo za rasvjetu.



Sl. 2.

Fluorescentna sijalica je dulja staklena cijev, kojoj je na unutarnjoj strani specijalnim postupkom nanesen sloj fluorescentnog materijala. Na svaki kraj cijevi utaljena je posebno preparirana žarna nit. Dovodi struje izvedeni su u obliku nožica učvršćenih na poklopce od izolirajućeg materijala koji zatvaraju krajeve cijevi (sl. 2.). Prije konačnog sastavljanja cijev se napuni plinom argonom i u nju se stavi nekoliko kapljica žive. Sijalica se na kraju evakuira do tlaka od nekoliko milimetara živinog stupca. Žarne niti fluorescentnih sijalica nisu iste kao kod običnih žarulja. Na spiralu od volframove žice nanesen je ovdje sloj barijevog ili stroncijevog oksida, koji smanjuje izlazni potencijal elektrona iz metala to jest olakšava izlazak elektrona iz žarne niti. Sasvim jednak postupak primjenjuje se kod prepariranja katoda elektronskih cijevi. Svaka od žarnih niti sijalice je dimenzionirana na polovicu radnog napona. Ako je radni napon 220 V, svaka žarna nit grije se sa 110 V.

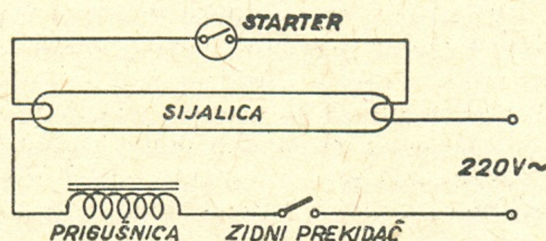
Najdelikatniji posao kod proizvodnje fluorescentnih sijalica je izrada sloja fluorescentne materije. Za postizavanje energetski najboljeg djelovanja, sloj mora imati određenu debljinu (oko 10 mikrona), određenu finoću zrna (0,5 do 5 milimikrona) i mora biti jednoliko raspodjeljen po unutarnjoj strani staklene cijevi. Da bi se to postiglo fluorescentna tvar se samelje u fini prašak, izmiješa sa pogodnim ljepilom u tekućem obliku i u točno odvaganim količinama stavlja u staklene cijevi, koje rotiraju oko duže osi velikom brzinom. Tekućina se zbog rotacije raspodjeli u tanak sloj, koji se još za vrijeme vrtnje osuši i čvrsto prilegne uz staklenu cijev.

Osim već spomenutog fluorita, još neki minerali pokazuju pojavu fluorescencije. U prvom redu mineral vilemit ili cinkov silikat, te kalcijev i magnezijev volframat. Osim njih dobro poznata fluorescentna tvar je i cinkov sulfid. Svi oni fluoresciraju u čistom stanju. U drugu grupu međutim spadaju tvari koje počinju fluorescirati tek kad im se dodaju izvjesne tvari zvane aktivatori. Tipičan predstavnik te grupe — kalcijev sulfid — fluorescira samo uz dodatak malih količina bizmuta. Poznato je da je i dragi kamen rubin (Al_2O_3) fluorescentna tvar ako sadrži tragove kroma. Važno je spomenuti da količinom aktivatora koji se dodaju fluorescentnoj tvari možemo utje-

cati i na spektralnu raspodjelu emitirane svijetlosti, t. j. mijenjati njenu boju. Tako će na pr. cink-berilijev silikat uz dodatak 0,90% mangana emitirati zeleno-žutu svijetlost. Poveća li se sadržaj mangana na 1,25 % svjetlost postaje jasno žuta. Kod 2,5% mangana ona je već žuto-narančasta, kod 3,3% narančasta, a kod 4,8% narančasto-crvena. Miješanjem raznih fluorescentnih tvari i aktivatora mogu se postići razne spektralne raspodjele svjetlosti, kao i to da miješanjem dobivena materija emitira bijelo svijetlo.

Kod opisa konstrukcije fluorescentne sijalice spomenuto je da se u nju stavlja i živa. Kako se kod evakuiranja dio žive ispari cijev je jednoliko ispunjena njenim parama. Uslijed električnog izbijanja u toj atmosferi ,pojaviti će se intenzivno ultraljubičasta svjetlost, pretežno valne dužine od 2537 Å, koja je upravo idealna za pretvorbu u vidljivo svijetlo pomoću fluorescencije. Za vrijeme rada sijalice fluorescentni sloj apsorbira proizvedenu ultraljubičastu i istovremeno emitira bijelu svijetlost, koju tada koristimo za rasvjetu.

Za rad fluorescentne sijalice i njeno paljenje potrebna je prigušnica velike samoindukcije i mali bimetalni prekidač koji se zove starter. Kako se ti dijelovi zajedno sa sijalicom spajaju na gradsku električnu mrežu prikazuje sl. 3. Sav do-



Sl. 3.

datni pribor ima svrhu, da se u sijalici postigne električno izbijanje i kod niskog napona od 220 V (neonske cijevi zahtijevaju napon i do 3000 V). Kod normalnog pogona naime kroz žarne niti ne prolazi struja i one se ne griju. Ukopča li se zidni prekidač struja iz gradske mreže poteče preko prigušnice i startera u žarne niti sijalice. Slično kao kod elektronskih cijevi iz njih izlijeću elektroni i one se obaviju elektronskim oblakom zvanim prostorni naboj. No istovremeno se zbog prolaska struje ugrijala i bimetalna traka startera. Ona je promijenila uslijed toga oblik i prekinula strujni krug. Prekidanje strujnog kruga izazvalo je na krajevima prigušnice visoku protuelektromotornu silu, koja preko gradske mreže djeluje direktno na obje žarne niti. Uslijed tako stvorenog visokog napona bivaju elektroni iz prostornog naboja jedne od žarnih niti snažno ubrzani prema u tom času pozitivnoj niti. Budući da se na tom putu sudaraju sa atomima žive, oni će ih zbog sudara ionizirati. Struji elektrona pridružiti će se i struja pozitivnih iona, pa kažemo da se stvorio ionski most. Protuelektromotorna sila naravno trenutno nestaje, ali se električno izbijanje podržava i sa samih 220 V. Netko će upitati: zašto se starter ne vraća u početni položaj kad je prestala teći struja u žarnim nitima? Do toga ne dolazi zbog njegove naročite konstrukcije: bimetalna traka se nalazi u malom staklenom balonu, koji je ispunjen razrijeđenim neonom ili argonom. Kad se u procesu paljenja sijalice razmaknu elektrode startera, on djeluje kao mala tinjalica. I u njemu dolazi do električnog izbijanja. Mala količina topline, koja se pritom razvija dovoljna je da kontakt bude stalno isključen.

Ispravan rad i paljenje fluorescentne sijalice znatno ovisi o temperaturi. One se, ako nisu zatvorene u naročite oklope, ne postavljaju na otvorenom prostoru, jer zimi kod niske temperature zatajuju u radu. Često smo vidjeli poneku sijalicu koja svijetli vrlo slabo i samo su joj krajevi osvjetljeni crvenkastom svjetlošću. Uzrok tome je neispravan rad startera, koji se zbog niske temperature ili kvara ne može razdvojiti pa se žarne niti neprestano zagrijavaju. Treba još spomenuti, da se prigodom rada sijalice stvaraju električni titraji čija frekvencija prelazi i u područje radiovalova, pa one ometaju normalan prijem. Da bi se

otklonila ta nezgoda, paralelno starteru stavlja se jedan kondenzator malog kapaciteta, koji za visokofrekventne struje predstavlja kratki spoj. Kondenzator je obično već tvornički ugrađen u sam oklop startera. Sijalice su često i nestručno postavljene, pa ispadaju iz svojih ležišta. Većinom se to dešava zbog toga, što se u armaturu sijalice ugrađuje i prigušnica, koja svojim vibriranjem prouzrokuje pad. Razbijene sijalice sa fluorescentnim slojem od cink berilijevog silikata su vrlo opasne, jer je taj spoj žestoko otrovan, pa eventualne rane od krhotina vrlo teško zacjeljuju.

Z. Ogorelec, Zagreb

Takmičenje učenika osnovnih škola na području beogradskog sreza školske 1959/60 god.

Društvo matematičara i fizičara NR Srbije i Podružnica Beograd dali su sugestiju već u početku školske godine da se u osnovnim školama, kojih ima ukupno 137 na teritoriji grada Beograda, organizuju takmičenja za učenike V-ih, VI-ih i VII-ih razreda u okviru samih škola. Gotovo u svim školama su ova takmičenja i obavljena i učenici koji su postigli najbolji uspeh nagrađeni su u okviru škola. Međutim neke opštine ovu akciju su proširile i na drugu fazu i sprovele takmičenja u okviru opština. Tako treba naročito istaći pravilan stav i shvatanje opštine Čukarica koja je kroz ova takmičenja obuhvatila 1875 učenika, što iznosi 58% od učenika V-ih, VI-ih i VII-ih razreda. Određena komisija od nastavnika osnovnih škola na ovoj opštini savesno je izvršila ovaj posao, Narodni odbor opštine je obezbedio materijalna sredstva te su na svečanosti koja je održana u Sali Narodnog odbora ovi učenici i nagrađeni a nastavnici pohvaljeni.

Komisija za takmičenje pri društvu organizovala je takmičenje samo za učenike VIII-ih razreda i to u tri etape. Prvo takmičenje se održalo u okviru škola 27 marta, drugo za prvenstvo na opštini 10 aprila i treće — finalno 8 maja za prvenstvo Beograda. Za sva tri takmičenja komisija je pripremila zadatke i poslala na dan takmičenja u zapečaćenim kovertima komisijama za takmičenje pri školama i pri opštinama.

Ova takmičenja su obuhvatila 12 opština sa 178 odeljenja VIII-ih razreda. U prvoj fazi učestvovalo je preko polovine od ukupnog broja upisanih učenika u VIII razred (52,11%) ukupno 2782 učenika. Za drugi stupanj na ovim takmičenjima plasiralo se 614 učenika (11,50%) a za finalno — prvenstvo Beograda 82 učenika (1,53%).

Zadaci za finalno takmičenje iz matematike osmih razreda osnovnih škola sreza Beograd — 8 maja 1960 godine.

1 zadatak:

a) Reši grafički sistem jednačina

$$\frac{4x-1}{6} - \frac{2(x-y)}{3} = 1\frac{1}{6}$$

$$\frac{3x-y+1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

b) Pročitaj preseke dobijenih grafika sa y — osom.

c) Dobijene rezultate pod a) i pod b) proveri računski.

2 zadatak:

Iz referata druga Tita na V Kongresu SSRNJ u kome su date perspektive izvođenja novog petogodišnjeg plana u Jugoslaviji vidi se:

I. da će do 1965 godine biti 19 800 000 stanovnika, od kojih će se 40% baviti poljoprivredom.

II. Da se danas od 18 600 000 stanovnika polovina bavi poljoprivredom.

III. Da je pre rata bilo 15 000 000 stanovnika od kojih se 11 250 000 bavilo poljoprivredom.

Za svaki vremenski period (1965, 1960 i pre rata) odredi:

a) Broj poljoprivrednog i nepoljoprivrednog stanovništva,

b) koji deo stanovništva se bavi poljoprivrednim, a koji nepoljoprivrednim zanimanjima?

c) procenat poljoprivrednog i nepoljoprivrednog stanovništva,

d) prikaži grafički strukturu (sastav) stanovništva kao delove kružne površine.

U kakvu će se privrednu zemlju razviti Jugoslavija? (poljoprivrednu ili industrisku).

3 zadatak:

Paralelogramu ABCD, AB = 6 cm AD = 4 cm ugao B = 75^0, konstruiši simetričan u odnosu na osu simetrije koja prolazi kroz sredinu M stranice AB i sredinu N stranice AD.

4 zadatak:

$\frac{3}{5}$ suda oblika ravnostranog valjka čiji je poluprečnik 1,5 dm napunjeno je vodom.

Kada se u taj sud stavi pravilna četverostrana piramida od mermera, čija je bočna ivica s = 13 cm, a dijagonala osnove d = 10 cm — izračunaj koliko bi litara vode trebalo još doliti u sud da bi on bio potpuno napunjen vodom.

2. Brković Aleksandar, učenik VIII r. (22 poena) Osnovna škola »Braća Ribar« — Stari Grad.

Drugom nagradom nagrađeni su sledeći učenici:

1. Reljin Branimir, učenik VIII razr. (19 poena) Osnov. škola »Vuk Karadžić« — Stari Grad.

2. Vučetić Slava, učenica VIII razreda (19 poena) Osnovna škola »Ivan Goran Kovačić« — Zvezdara.

Trećom nagradom nagrađeni su sledeći učenici:

1. Carić Zorana, učenica VIII razreda (18 poena) Osnovna škola »Radoje Domanović — Stari Grad.

2. Mihailov Svetlana, učenica VIII r. (18 poena) Osnovna škola »Svetozar Marković« — Vračar.

3. Tropin Aleksandar, učenik VIII r (18 poena) Osnovna škola »Sveti Sava« — Vračar.

PREGLED POSTIGNUTIH USPEHA U SVE TRI FAZE — VIII RAZRED

Naziv opština	Bro odelenja	Broj učenika	Takmičenje na I stupnju		Takmičenje na II stupnju		Takmičenje finalno	
			broj	%	broj	%	broj	%
Stari Grad	22	721	294	40,78%	61	8,46%	14	1,94%
Vračar	28	890	359	40,33	98	11,01	13	1,46
Zvezdara	16	423	144	34,04	45	10,64	14	3,30
Voždovac	21	580	445	78,44	77	13,27	7	1,20
Čukarica	19	538	369	68,58	68	12,64	11	2,04
Palilula	16	474	160	33,75	48	10,12	7	1,47
Savski Venac	18	590	381	64,58	74	12,54	2	0,34
Novi Beograd	7	200	78	39,00	18	9,00	2	1,00
Zemun	16	501	223	44,52	54	10,71	2	0,31
Krnjača	4	140	101	72,14	22	15,71	4	2,85
Barajevo	4	99	48	52,37	12	12,52	4	6,84
Grocka	7	182	170	93,40	37	20,33	4	2,19
Ukupno:	178	5338	2772	52,11%	614	11,50%	84	1,53%

Prvom nagradom nagrađeni su sledeći učenici:

1. Popović Bojan, učenik VIII raz. (22 poena) Osnovna škola »Braća Ribar« — Stari Grad.

Četvrtom nagradom nagrađeni su sledeći učenici:

1. Rašković Fern, učenik VIII razreda (16 poena) Osnovna škola »Veljko Dugošević« — Zvezdara.

2. Crevar Danica, učenica VIII razreda (16 poena) Osnovna škola »Vožd Karađorđe« — Voždovac, i

3. Ćilerdžić Nedeljko, učenik VIII r. (17 poena) Osnovna škola »Đorđe Krstić« — Čukarica.

Na svečanosti koja je održana 16 maja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sali Narodnih heroja podeljene su diplome i nagrade ovim učenicima u prisustvu učenika takmičara — profesora i nastavnika Prirodno-matematičkog fakulteta, Više ped. škole, gimnazija i osnovnih škola, direktora ovih škola i roditelja.

Pretsednik komisije:
prof. Mihailović Jelena

Takmičenje učenika gimnazije u rešavanju zadataka iz matematike za prvenstvo NR Srbije u 1960 g. i savezno takmičenje 8 V 1960

Društvo matematičara i fizičara NR Srbije sa podružnicama organizovalo je i ove godine takmičenje u rešavanju zadataka iz matematike za učenike svih razreda gimnazija i to Republičko na području NR Srbije, a Savez društava matematičara i fizičara Jugoslavije organizovao je savezno takmičenje za učenike III i IV razreda.

Ova takmičenja su se odvijala u četiri stupnja. Tri za prvenstvo Srbije, a četvrto za prvenstvo Jugoslavije.

Prvo takmičenje obavljeno je u svim gimnazijama NR Srbije 21 februara. Na ovom takmičenju učestvovalo je preko 2000 učenika iz svih razreda. U Beogradu od 7403 učenika iz 12 gimnazija takmičilo se 565 učenika ili 7,6%. Najveći broj u procentima imala je XIII beogradska gimnazija (14%), zatim III beogradska (11,34%), Zemun (11%) i XI beogradska gimnazija (10%). Najmanji broj učenika u prvom takmičenju imala je škola u Obrenovcu (3%), zatim V beogradska gimnazija (3,2%) i I beogradska (4,1%).

Od ukupnog broja učenika kvalifikovalo se za sledeći stupanj — za prvenstvo Beograda, ukupno 39 učenika (26%) od toga relativno najviše iz XIII i III beogradske gimnazije, dok se iz ostalih škola kvalifikovao približno isti broj.

Drugo takmičenje organizovano je u 12 centara NR Srbije koje je održano 13 marta na kome je učestvovalo u: Beogradu 134, Novom Sadu 65, Nišu 58, Titovom Užicu 40, Svetozarevu 32, Aranđelovcu 27, Zrenjaninu 25, Prištini 22, Zaječaru 22, Šapcu 21, Kragujevcu 20 i Požarevcu 20 učenika.

Ukupno je na ovom takmičenju učestvovalo 486 učenika.

U Beogradu od 134 učenika kvalifikovalo se za III stupanj 49 učenika. Podružnica Beograda je nagradila najbolje učenike i pohvalila najbolje škole. Najbolji uspeh su pokazali na II stupnju učenici iz XV beogradske i XIV beogradske gimnazije, zatim iz II beogradske, a najslabiji iz X beogradske gimnazije. Prvu nagradu su dobili učenici: Radulović Predrag, učenik IV razreda XIV beogradske gimnazije, Hribšek Marija, učenica III razreda XV gimnazije i Mršević Mila, učenica XV beogradske gimnazije. Drugu nagradu dobili su: Popović Zoran, učenik IV razreda XIV beogradske, Tomašević Ivana, učenica III razreda VI beogradske gimnazije, Momčilović Blagoje, učenik II razreda XV beogradske gimnazije i Čadeš Istok, učenik I razreda II beogradske gimnazije. Treću i četvrtu nagradu dobili su: Mojsilović Predrag, učenik IV razreda III beogradske gimnazije, Milić Jordanka, učenica III razreda II beogradske gimnazije, Čakarmiš Smilja, učenica I razreda zemunske gimnazije, Jočić Tatomir, učenik II razreda XIII beogradske gimnazije, Latković Zoran, učenik II razreda XIV beogradske gimnazije, Tomašević Mirjana, učenica IV razreda XV beogradske gimnazije, Marić Nebojša, učenik III razreda II beogradske gimnazije i Todorović Petar, učenik III razreda II beogradske gimnazije.

Na takmičenju u svih 12 centara kvalifikovalo se za takmičenje trećeg stupnja — za prvenstvo Srbije iz: Beograda

48, Niša 17, Aranđelovca 17, Titovog Užica 13, Požarevca 10, Kragujevca 8, Svetozareva 15, Novog Sada 16, Zrenjanina 6, Zaječara 3, Šapca 2 i iz Prištine 1 učenik.

Treće takmičenje za prvenstvo NR Srbije, za koje se plasiralo ukupno 149 učenika održano je u aprilu na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu. Na ovom takmičenju učenici I i III razreda iz Srbije postigli su bolje rezultate od učenika iz beogradskih škola, dok su učenici II i IV razreda iz beogradskih škola postigli bolje rezultate. Škole su se na ovom takmičenju plasirale ovim redom: XV beogradska, XIV beogradska, Svetozarevo, Niš »Svetozar Marković«, Požarevac, Kragujevac, Smederevo, Pirot, Čačak, Valjevo, Zrenjanin, Subotica, Novi Sad »Jovan Jovanović-Zmaj«, Zemun, XIII beogradska, II beogradska, itd.

Komisija za takmičenje pri Društvu posle pregleda zadataka odlučila je da nagradi ove učenike:

Prvom nagradom:

Popović Zorana, IV r. XIV g. Beograd, Aranđelović Dragoljuba, III r. g. Svetozarevo, Lugomirski Dragoslava, III r. g. Kragujevac, Momčilović Blagoja, II r. XV g. Beograd, Mršević Milu, I r. XV g. Beograd.

Drugom nagradom:

Mojsilović Predraga, IV r. III g. Beograd, Veličković Dragutina, III r. g. »Sv. Marković« Niš, Hribšek Mariju, III r. XV g. Beograd, Davidović Dragomira, II r. g. Senta, Trajković Dušana, I r. g. Smederevo.

Trećom nagradom:

Obradović Momčila, IV r. XV g. Beograd, Đanković Bratislava, III r. g. Pirot, Radosavljević Gordana, II r. g. Svetozarevo, Blagojević Milutina, I r. g. Požarevac, Ignjatović Branislava, III r. g. Valjevo.

Četvrtom nagradom:

Kesler Stanislava, IV r. XIV g. Beograd, Večanski Dragomira, III r. g. Zrenjanin.

Za Savezno takmičenje plasirali su se iz NR Srbije po 7 učenika iz III i IV razreda, koji su postigli najveći broj poena.

Za III razred:

Lugomirski Dragoslav, Kragujevac, Aranđelović Dragutin, Niš »Svetozar Marković«, Danković Bratislav, Pirot, Hribšek Marija, XV g. Beograd, Večanski Dragomir, Zrenjanin II, Jeremić Biljana, Niš »Svetozar Marković«.

Za IV razred:

Popović Zoran, XIV g. Beograd, Mojsilović Predrag, XIII g. Beograd, Obradović Momčilo, XV g. Beograd, Kesler Stanislav, XIV g. Beograd, Radulović Predrag, XIV g. Beograd, Basler Marta, Sombor, Djipanov Relja, XI g. Beograd.

Na Saveznom takmičenju koje se održalo 8 V u Beogradu učestvovalo je po 25 učenika iz III i IV razreda i to po 7 iz NRS, po 6 iz NRH, po 5 iz Slovenije, po 3 iz Bosne i Hercegovine, po 2 iz Crne Gore i po 2 iz Makedonije.

Potanje o tom takmičenju doneseno je u 4 broju prošlog godišta.

Zadaci na tom takmičenju bili su ovi:

3 razred:

1. Posuda ima oblik kvadra. Baza je pravokutnik opsega 4 cm. Visina kvadra je 5 cm.

a) Koliki treba da su osnovni bridovi, pa da posuda ima maksimalni volumen?

b) U kojem je intervalu funkcija za volumen definirana?

c) Nacrtati graf te funkcije.

Zadamo li osnovni brid i visinu, kako ovisi volumen o opsegu baze? Koje su dopuštene vrijednosti za opseg baze? Prikaži to grafički i tabelarno.

$(a = 2 \text{ cm}, \ v = 5 \text{ cm})$

2. Koliki je brid kocke, koja je upisana u pravilnu trostranu piramidu s osnovnim bridom a i visinom v tako, da 4 vrha leže na bazi, a ostala 4 vrha na pobočnim plohama piramide?

3. Odrediti sve vrijednosti za x, za koje je:

$$\log_{1/2}(x^2 - 4x + 3) > -3$$

4. Zadan je krug *(c)* sa centrom u tački *O* i radiusa *R*. Tačka O_1 koja se nalazi na periferiji zadanog kruga, centar je drugoga kruga s radiusom $r = R/2$.

Ako su *A* i *B* presječne tačke ova dva kruga, izračunati približnu vrijednost kuta *AOB* (u radijanima), a zatim volumen zajedničkog dijela dvije sfere koje se dobivaju rotacijom ova dva kruga oko pravca OO_1.

5. Dokazati identičnost

$$(1 - \cos b \cdot \cos c)^2 - 2(1 - \cos b \cdot \cos c) + \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b - \sin^2 c = 0$$

i rješenje dovesti na najjednostavniji oblik.

4. razred:

1. Pokazati da je proizvod tri uzastopna broja deljiv sa $7 \cdot 8 \cdot 9$, ako je srednji broj kub nekog drugog broja.

2. Uočiti krug *(O, r)*, jedan njegov prečnik *AB* i jednu tačku *M* na krugu. Tačka *M* projektuje se u tačku *Q* na *AB*. Prava *AN* (*N* je sredina duži *MQ*) seče dati krug u *D*. Odrediti jednačinu geometriskog mesta preseka *P* pravih *BD* i *QM*, kad se tačka *M* kreće po krugu *(O, r)*.

3. Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih cijelih brojeva iznosi $0{,}0\dot{a}$ gdje je *a* jedna od 9 cifara: 1, 2, 3, 4, . . . , 9. Za koje *a* zadatak ima rješenja i koliko?

4. Kroz proizvoljnu tačku u unutrašnjosti trougla prolaze tri prave linije paralelno stranama trougla. Ove prave dele površinu trougla na 6 delova, od kojih su 3 trougla s površinama s_1, s_2, s_3. Kolika je površina trougla?

5. Data je familija krivih

$$y = (m - 1) \cdot x^2 + 2mx + 4.$$

a) Dokazati da sve date familije prolaze kroz dve fiksne tačke *A* i *B* i odrediti ih.

b) Odrediti krivu date familije koja dodiruje osu *Ox*, a zatim odrediti onu krivu čije teme leži u tački *B*. (*B* ne leži na osi *Ox*).

prof. Mihailović Jelena

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

434. Дата је једначина

(1) $$x^2 + 2x + m - 1 = 0.$$

а) Испитати егзистенцију и знак корена за разне вредности параметра *m*.

б) Претставити као функцију од *m* изразе

$$A = x_1^2 + x_2^2, \quad B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

затим утврдити да ли постоји таква вредност *m* да је 1. $A = 0$, 2. $A = B$.

в) Одредити оне вредности *m* за које је $A > C$, где је $C = \frac{A}{B}$. Резултат проверити на графику функција променљиве *m*: *A* и *C*.

435. Дата је дуж $AB = 2a$. У средини *O* те дужи подигнута је нормала и на њој нанесено $OD = \frac{a}{2}$. Тачке *A* и *D* спојене су правом *AD*, а из *B* је спуштена нормала *BC* на *AD*.

а) Изразити у функцији од *a* дужине *AD*, *AC* и *BC*.

б) Дуж *DO* продужена је за $OE = a$ и конструисана права *CE* која сече *AB* у *P*. Показати да тачке *A*, *C*, *B* и *E* леже на истом кругу. Израчунати дужине *AP* и *BP*.

436. Парабола $y = x(k - x)$ пролази кроз координатни почетак и сече *Ox* у тачки *A*. Који услов мора задовољити *k*, ако на луку параболе *OSA*, где је *S* теме, постоје две тачке M_1 и M_2 тако да је $\sphericalangle OM_1A = \sphericalangle OM_2A = 90°$? Одредити у том случају координате тачака M_1 и M_2.

437. У равнокраком тразезу, у ком су основице $AB = 2a$, $CD = 2b$, уписан је пруг са центром *O*. Показати да је $\sphericalangle BOC$ прав, па изразити у функцији од *a* и *b*, полупречник *r* уписаног круга, затим површину трапеза и дуж која спаја тачке у којима уписани круг додирује краке трапеза.

438. Stranice *a*, *b* i *c* trokuta *ABC* pripadaju redom pravcima: $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$. Pravac *DE* dijeli stranicu *AB* u omjeru $AD : BD = -\frac{1}{2}$, a stranicu *BC* u omjeru $BE : CE = -3$. U kojem omjeru dijeli pravac *DE* stranicu *AC*, a u kojem visinu trokuta *ABC*, koja izlazi iz vrha *A*?

439. Iz točke $A\left(\frac{31}{5}, \frac{28}{5}\right)$ vidi se tetiva BC kružnice $x^2 + y^2 = 25$ pod kutom $\alpha = 45°$. Ako su $x_1 = -5$, $y_1 = 0$ koordinate točke B, kolika je duljina tetive BC?

440.* Roba, kojoj je cijena a dinara po kilogramu pojeftini za p%, a zatim opet pojeftini za p%. Najzad joj je cijena b dinara/kg. Izračunati p. Specijalno: $a = 1000$, $b = 640$.

441.* Tangencijalni istokračni trapez ima srednjicu 10, a kut na bazi 45°. Izračunati (na 2 dec.) vrijednost omjera u kojem sjecište dijagonala dijeli dijagonalu.

442. Izračunaj pomoću kongruencije ostatak dijeljenja broja 91234^{5128} s brojem 7.

443. Izvedi pomoću kongruencija pravila djeljivosti brojeva s 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 u brojnom sistemu s bazom 12.

444. Pokaži pomoću kongruencije da je $2^{2^5} + 1$ djeljivo s 641.

445. U trokutu ABC povučena je visina $v_a = AD$, te je $HD = \frac{1}{3} AD$, gdje je H ortocentar trokuta. Neka se dokaže da postoje ove relacije: $tg\,\beta\; tg\,\gamma = 3$, $2\,tg\,\alpha = tg\,\beta + tg\,\gamma$, $cos\,(\beta - \gamma) = 2\,cos\,\alpha$.

446. Na kružnom kvadrantu OAB kruga polumjera r nalazi se točka M. Iz M spusti se okomica MC na polumjer OB i spoji se M s A. Neka se odredi kut $AOM = x$ tako da bude $AM + 2\,MC = d$, gdje je d zadana dužina.

447. Dat je sistem jednačina

$$x^y = 9$$

$$\sqrt[y]{64} = 8\left(\frac{x}{3}\right)^3.$$

a) Rešiti jednačinu bez upotrebe logaritamskih tablica.

b) Odrediti parabolu $y^2 - 2px = 0$, koja prolazi kroz tačku $M(x, y)$, gde je x, y rešenje date jednačine.

c) Kolika je zapremina tela koje nastaje rotacijom površine zahvaćene lukom parabole, tangentom u tački $M(x, y)$ i ordinatnom osom.

B) Zadaci iz fizike

201. Silu $P = 20$ kp treba rastaviti na dvije paralelne komponente P_1 i P_2. Komponenta $P_1 = 15$ kp i hvatište te sile je $a = 2$ m udaljeno od smjera sile P. Kolika je druga komponenta P_2 i gdje joj je hvatište?

202. Iz horizontalne cijevi, koja je $L = 0{,}6$ m iznad zemlje istječe voda i pada $s = 1{,}75$ m daleko. Kolika je brzina v, vode, koja istječe iz cijevi?

203. Jedna tekućina ima temperaturu t_1°C i specifičnu toplinu c_1, a druga tekućina ima temperaturu t_2°C i specifičnu toplinu c_2. Želimo dobiti smjesu od p kg tekućine čija je temperatura t°C. Koliko kg moramo uzeti jedne, a koliko kilograma druge tekućine?

204. Koju temperaturu ima voda, ako se 3 kg leda od 0°C polije s 4 kg kipuće vode? Latentna toplina talenja leda je 80 kgcal.

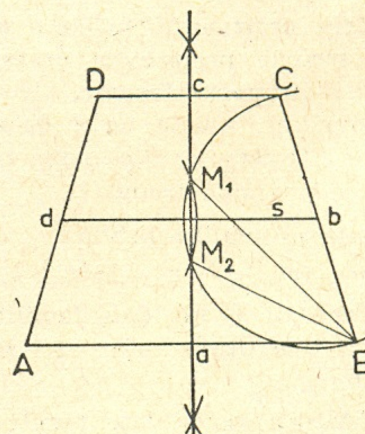
205. Unutarnji otpor nekog elementa je 0,24 Ω. Kad je vanjski otpor kruga struje 5 Ω, jakost struje u tom krugu je 0,36 A. Kolika je elektromotorna sila elementa?

C) Rješenja iz matematike

420. *Na osi simetrije enakokrakega trapeza določiti točko M_1 iz katere se oba kraka vidita pod pravim kotom.*

Če leži M na srednjici trapeza, pokazati, da je krak trapeza enak njegovi srednjici.

Točko M moramo določiti tako, da bo $\sphericalangle BMC = 90°$. Točka M je torej sečišče osi simetrije z krožnico, ki ima krak $\overline{BC}$ za premer. Tako dobimo dve točki, M_1 in M_2, iz katerih se oba kraka vidita pod pravim kotom, vendar to le v primeru, da je ispolnjen pogoj $\frac{s}{2} < r$ oz. $\frac{a+c}{4} < \frac{b}{2}$ t. j. $\frac{a+c}{2} < b$, torej, da je krak večji od srednjice. V primeru, da je krak enak srednjici, je rešitev le ena,



torej le ena točka M, iz katete se oba kraka vidita pod pravim kotom. Če je $b = \frac{a+c}{4}$,

potem je $r = \frac{b}{2} = \frac{a+c}{4} = \frac{s}{2}$ in točka M leži na srednjici. Ako pa je krak manjši od srednjice, naloga ni rešljiva.

Vilko Maček, 3. b r. 2. g. Ljubljana

421. *Skratiti razlomak u algebarskom izrazu*

$$f(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^2+x-2} - \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6},$$

zatim rešiti nejednačinu $f(x) < 0$.

$$\frac{2(x^2-1)}{x^2+x-2} - \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{2(x+1)}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2-6x-8}{(x+2)(x-2)}.$$

$\frac{x^2-6x-8}{(x+2)(x-2)} < 0$. Razlikujemo dva slučaja, za čije će vrednosti $f(x)$ biti manje od nule:

I. $f(x)_1 \equiv x^2 - 6x - 8 < 0 \quad f(x)_1 < 0,$
ako $3 - \sqrt{17} < x < 3 + \sqrt{17}$
$f(x)_2 \equiv (x+2)(x-2) > 0 \quad f(x)_2 > 0,$
ako $-\infty < x < -2;\ 2 < x < +\infty$

II. $f(x)_1 \equiv x^2 - 6x - 8 > 0 \quad f(x)_1 > 0,$
ako $-\infty < x < 3 - \sqrt{17};\ 3 + \sqrt{17} < x < +\infty$
$f(x)_2 \equiv (x+2)(x-2) < 0 \quad f(x)_2 < 0,$
ako $-2 < x < 2$.

Tražena rješenja su

$$-2 < x < 3 - \sqrt{17}$$
$$2 < x < 3 + \sqrt{17}$$

Bazler Mikloš, 3. r. g. Sombor

422. *Дата су два цела позитивна броја a и b, тако да је*

$$(1) \qquad \frac{a-27}{b} = \frac{a}{b+12}$$

а) Изразити a у функцији од b. На основу тога показати да је b мултипл (вишекратник) броја 4 и да се разломак $\frac{a}{b}$ може изразити у облику

$$\frac{27+9k}{4k}$$

где је k цео позитиван број.

б) Показати да бројеви $a = 27 + 9k$ и $b = 4k$ задовољавају (1). *Одредити вредности k за које се разломак $\frac{a}{b}$ налази између 5 и* 10.

а) I .. и множења (1) са $b(b+12)$ добија се да је $a = \frac{9b+108}{4}$.

Да би a био цео број мора да је $9b$ дељиво са 4. Овај услов је испуњен за $b = 4k$.
$\frac{a}{b} = \frac{9b+108}{4b}$ за $b = 4k$, $\frac{a}{b} = \frac{27+9k}{4k}$ за $k = 1, 2, 3, \ldots$

б) Заменом за $a = 9k + 27$, $b = 4k$ у (1) добија се идентичност леве и десне стране што значи да обе вредности задовољавају (1).

$$10 > \frac{a}{b} > 5 \ (2) \quad \text{или} \quad 10 > \frac{27+9k}{4k} > 5$$

што је испуњено за $\frac{27}{11} > k > \frac{27}{31}$.

Како је k цео број то је (2) задовољено за $k = 1$, $k = 2$.

Душан Милашиновић
свр. уч. 4 р. г. Смед. Паланка

423. *Dokazati da je broj $2^{55} + 1$ deljiv sa* 11.

Ako je broj $2^{55} + 1$ deljiv sa 11 mora biti $(2^{55} + 1) : 11$ jednako nekom celom broju.

Dati broj može se napisati i ovako:

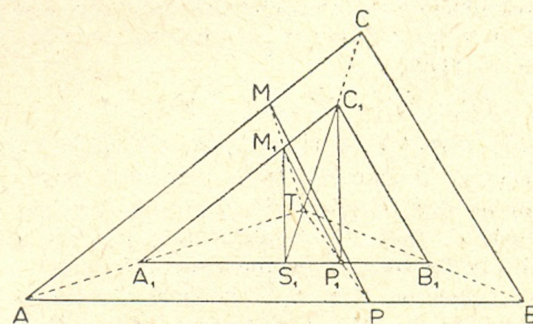
$$(2^5)^{11} + 1^{11} = (2^5+1)(2^{50} - 2^{45} + 2^{40} - 2^{35} + 2^{30} - 2^{25} + 2^{20} - 2^{15} + 2^{10} - 2^5 + 1) =$$
$$= 33(2^{50} - 2^{45} + 2^{40} - 2^{35} + 2^{30} - 2^{25} + 2^{20} - 2^{15} + 2^{10} - 2^5 + 1)$$

odakle se vidi da je desna strana zaista deljiva sa 11.

Jevrosima Stanojević
van. uč. 4 r. g. »Sv. Mark.« Niš

424. *Zadanom povoljnom točkom unutar povoljnog trokuta povući pravac, koji raspolavlja površinu tog trokuta.*

Neka je $\triangle ABC$ zadani povoljni trokut, a u njemu povoljno zadana točka P_1 (sl. 1.). Trokutu ABC nacrtamo perspektivno sličan trokut $A_1B_1C_1$ s obzirom na težište T tako da



Sl. 1.

P_1 leži na obodu $\triangle A_1B_1C_1$. Spajamo P_1 sa C_1, polovištem S_1 stranice A_1B_1 paralela $S_1M_1 \parallel P_1C_1$ (Sl. 1).

$$\triangle A_1S_1M_1 + \triangle M_1S_1C_1 = \triangle A_1S_1M_1 + \triangle M_1S_1P_1$$

$$\triangle A_1S_1C_1 = \triangle A_1P_1M_1$$

$$\triangle A_1B_1C_1/2 = \triangle A_1P_1M_1 .$$

Prema tome P_1M_1 raspolavlja trokut $A_1B_1C_1$.

Ako je faktor linearnog povećanja k, t. j. $AB = k \cdot A_1B_1$, bit će:

$$\triangle ABC = k^2 \cdot \triangle A_1B_1C_1, \text{ zatim:}$$

$$\triangle APM = k^2 \cdot \triangle A_1P_1M_1 = k^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \triangle A_1B_1C_1 = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle ABC}{k^2} = \frac{1}{2} \cdot \triangle ABC .$$

Međutim PM ne prolazi točkom P_1! Sada treba još $\triangle APM$ pretvoriti u $\triangle AXY$ tako da kut A ostane sačuvan, a XY da prolazi točkom P_1. (Sl. 2 izdvajamo radi veće jasnoće.) $XPYM$ mora biti trapez, dakle

$$AX : AP = AM : AY,$$

t. j. treba konstruirati točku Y tako da bude $AP \cdot AM = AX \cdot AY = d^2$ (dužina d je geo-

Sl. 2.

metrijska sredina poznatih dužina AP i AM). Da dođemo do Y u analizi zadatka povučemo $P_1T \parallel AM$, TY, $XV \parallel TY$. Vrijedi:

$$AT : AY = AX : AV, \quad AT \cdot AV = AX \cdot AY = d^2,$$

dakle $AV = d^2 : AT$, t. j. možemo poznatom konstrukcijom treće geometrijske proporcionale dobiti točku V, koja je potrebna za konstrukciju Y. Nadalje je

$$TP_1 : AY = TX : AX = YV : AV,$$

odatle $AY \cdot YV = AV \cdot TP_1 = v^2$ (AV i TP_1 poznato). Dužinu AV treba točkom Y razdijeliti na dva odreska tako da im je produkt jednak v^2. Nad AV polukružnica; paralela u visini v; iz sjecišta okomica na AV; nožište je Y. Spojimo Y sa P_1 i konačno dobivamo traženi pravac YX koji prolazi točkom P_1 a raspolavlja $\triangle ABC$.

Još jedan način. Neka je M povoljna točka u povoljnom trokutu ABC (sl. 3.). S je po-

Sl. 3.

lovište tražene dužine ED koja raspolavlja trokut ($SE = SD$). Iz trigon. formule za površinu trokuta imamo

$$4xy : bc = 1 : 2, \quad xy = \frac{bc}{8}$$

$$p : 2x = (2y - q) : 2y$$

$$py + qx = 2xy = \frac{bc}{4}$$

$$pqxy = \frac{bcpq}{8}, \quad u = py, \quad v = qx$$

$$u + v = \frac{bc}{4}, \quad uv = \frac{bcpq}{8}$$

$$u^2 - \frac{bc}{4} u + \frac{bcpq}{8} = 0$$

$$u = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 8bcpq}}{8}$$

Sad je određeno x i y t. j. točka S. Spojnica SM je traženi pravac. Zadatak ima općenito 6 rješenja.

Napomena uredništva. Zadatke riješili Mesihović Behđed (2 načina), Paar Vladimir, Lugomirski Dragoslav, Pohar Florijan, Aranđelović Dragoljub, ali njihova su rješenja stigla, kad je list već bio u prelomu.

425. *Nađi jednadžbu kružnice, koja prolazi sjecištima pravca* $s \equiv y + x - 3 = 0$ *i kružnice* $k \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, *a dotiče pravac* $t \equiv y + 1 = 0$. *Zadatak zadovoljavaju dvije kružnice: pod kolikim se kutom one sijeku?*

Koordinate sjecišta kružnice i pravca su rješenja jednadžbe kružnice i jednadžbe pravca: $T_1\,(0,3)$ i $T_2\,(2,1)$. Nadopunjavanjem dobivamo za jednadžbu kružnice:

$$k \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 2 = 0$$

i od tuda je $p = 1$, $q = 2$ i $r^2 = 2$.

Sve kružnice, koje prolaze točkom T_1 odnosno T_2 moraju zadovoljiti jednadžbe

$$p^2 + (3 - q)^2 = r^2$$
$$(2 - p)^2 + (1 - q)^2 = r^2.$$

Obavimo kvadriranja, zbrojimo jednadžbe uredimo dobivamo uvjetnu jednadžbu

$$p^2 + q^2 - 2p - 4q + 7 = r^2. \qquad (1)$$

Oduzimanjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$q = p + 1$$

(to je jednadžba simetrale na kojoj se nalaze središta svih kružnica, koje prolaze točkama T_1 i T_2).

Treći uvjet je da pravac $y = -1$ bude tangenta kružnice:

$$(q + 1)^2 = r^2.$$

Stavimo li za $q = p + 1$ dobivamo $r^2 = (p + 2)^2$ i to uvrstimo u uvjetnu jednadžbu (1). Dobivamo:

$$p^2 - 8p = 0.$$

Od tuda je $p_1 = 0$, $q_1 = 1$, $r_1^2 = 4$ i $p_2 = 8$, $q_2 = 9$, $r_2^2 = 100$.

Tražene kružnice su:

k_1 . . . . . $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

k_2 . . . . . $(x - 8)^2 + (y - 9)^2 = 100$.

Koeficijent smjera tangente kružnice k_1 u točki $T_1\,(0{,}3)$ je $a_1 = 0$, a koeficijent smjera tangente kružnice k_2 u točki $T_1\,(0{,}3)$ je $a_2 = -\frac{4}{3}$, pa se kružnice sijeku pod kutom

$$tg\,\psi = \frac{4}{3}, \quad \psi = 53°\,8'.$$

Ivan Andrić, 3. c r. 5. g. Zagreb

426. *Тачка A лежи на правој* $p_1 \equiv 2x - y + 7 = 0$, *а тачка B на правој* $p_2 = x + y - 9 = 6$. *Круг K, коме је дуж AB пречник, има центар у тачки* $S\,(1{,}4)$; *он сече праву* p_1 *у тачкама A и D, а* p_2 *у B и C. Нађи површину четвороугла ABCD!*

Нека су координате тачке $A\,(x_1 y_1)$, а $B\,(x_2 y_2)$; пошто је $S\,(1{,}4)$ средина дужи AB следује

$$1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } 4 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Одакле је

$$x_1 = 2 - x_2; \quad y_1 = 8 - y_2. \qquad (1)$$

Како тачка A лежи на правој p_1 имамо систем једначина:

$$2\,(2 - x_2) - 8 + y_2 + 7 = 0$$
$$x_2 + y_2 - 9 = 0$$

чији су корени $x_2 = 4$ и $y_2 = 5$ координате тачке B.

Из (1) добијају се координате тачке $A\,(-2, 3)$.

Величина

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{10}$$
$$\text{и} \qquad r = \sqrt{10}.$$

Круг K има једначину

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

или после сређивања

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0.$$

Ова једначина са једначином праве p_1 одређује координате тачака A и $D\,(0{,}7)$, а иста једначина круга са правом p_2 даје координате тачака B и $C\,(2{,}7)$.

Координате тачака су: $A\,(-2{,}3)$, $B\,(4{,}5)$, $C\,(2{,}7)$, $D\,(0{,}7)$.

Површина $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$.

Површина троугла израчунава се према

$$P = \frac{1}{2}\,[x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)]$$

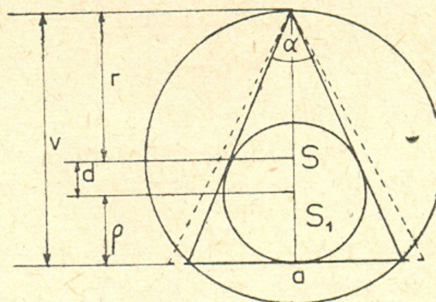
па је

$P_{ABC} = 8$, а $P_{ACD} = 4$ па је $\underline{P_{ABCD} = 12.}$

Вечански Драгомир, 4/2 2 г. Зрењанин

427. *Zadana je baza istokračnog trokuta a i kut na vrhu α. Kolika je udaljenost središta opisane i središta upisane kružnice?*

Kad je $\alpha = 60°$ središte opisane kružnice (S) i središte upisane kružnice (S_1) nalaze se u istoj točki, te je udaljenost $d = 0$; kad je



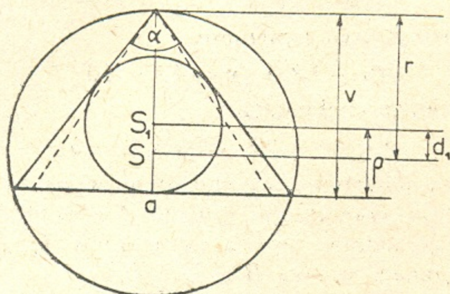
Sl. 1.

$\alpha < 60°$ vidi se prema sl. 1, da je $d = v - r - \rho$; kad je $\alpha > 60°$ (na sl. 2. označena je udaljenost s d_1) $d_1 = v - (v - \rho) - (v - r) = -v + r + \rho$ ili $d_1 = -(v - r - \rho) = -d$.

Vrijednost $v - r - \rho$ izračunat ćemo iz sl. 3. Bit će: $v = \frac{a}{2}\,ctg\,\frac{\alpha}{2}$; nadalje iz $2r = \frac{a}{sin\,\alpha}$, dobivamo $r = \frac{a}{2\,sin\,\alpha}$; isto tako ima-

mo $\rho = \frac{a}{2}\, tg \frac{\gamma}{2}$, što je, s obzirom, da je

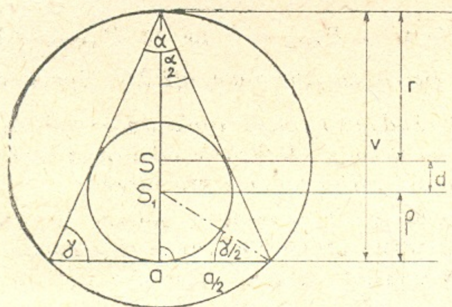
$$\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2}, \quad \rho = \frac{a}{2}\, tg \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$



Sl. 2.

Sada je: $v - r - \rho = \frac{a}{2}\, ctg \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2 \sin \alpha} -$

$$- \frac{a}{2}\, tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{a}{2}\left[ctg \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} - \right.$$



Sl. 3.

$$\left. - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} - \right.$$

$$\left. - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} - \right.$$

$$\left. - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left[ctg\, \alpha - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left[tg\,(90° - \alpha) - tg\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\left(90° - \alpha - 45° + \frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\,(90° - \alpha) \cos\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\left(45° - \frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin \alpha \cos\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Imenšek Mladen, 3. g r. 7. g. Zagreb

428. *Збир ових функција*

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{tg^2 x} + \frac{1}{ctg^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{cosec^2 x}$$

изрази помоћу функције синус и одреди екстремну вредност тог збира.

Сабирањем двају сличних чланова (*sin, cos*) добијамо:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)};$$

$$\frac{1}{tg^2 x} + \frac{1}{ctg^2 x} = tg^2 x + ctg^2 x =$$

$$= \frac{2 \sin^4 x - 2 \sin^2 x + 1}{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)} \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{cosec^2 x} = 1.$$

Ако горњи збир означимо са y тада је:

$$y = \frac{2 - \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)} = \frac{2}{\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)} - 1.$$

Проширивањем првог члана на десној страни једнакости са 4 добијамо

$$y = \frac{8}{\sin^2 2x} - 1.$$

Именилац $\sin^2 2x$ има екстремну вредност 1 па је екстремна вредност (минимум) функције $y = 7$, а постиже се за

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(2k + 1).$$

Вечански Драгомир, 4_2 2 г. Зрењанин

429. *Za koje vrijednosti od m ima jednadžba*

$$\cos 2x = 2\, m \cos x$$

rješenja?

Zadanu jednadžbu možemo pisati

$$2 \cos^2 x - 2m \cos x - 1 = 0.$$

Sada treba ispitati, koliko korijena ima ova jednadžba između -1 i $+1$.

Načinimo $f(-1$ i $f(1)$ nalazimo:

$$f(-1) = 2m + 1 \qquad f(1) = -2m + 1.$$

Harmonijska invarijanta $I = -6$.

Transformirana je jednadžba

$$(1 - 2m)\, y^2 - 6y + 2m + 1 = 0$$

$$D = 36 + 4\,(4m^2 - 1) = 16m^2 + 32 \geqq 0.$$

Kako vidimo $D > 0$ za bilo koju realnu vrijednost od m. Descartes-ov je niz

$$-2m + 1 \quad -6 \quad 2m + 1.$$

Karakteristične su vrijednosti:

$$-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}.$$

Razlikujemo ove slučajeve:

1. $-\infty < m < -\frac{1}{2}$.

Descartes-ov niz ima predznake

$$+ \quad - \quad -$$

Jedan korijen je između -1 i $+1$.

Kako je $af(-1) < 0$ za razmatrani interval, $af(1) > 0$, to je $x_1 < -1 < x_2 < 1$.

Veći je korijen između -1 i $+1$.

2. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$. Descartes-ov niz ima predznake

$$+ \quad - \quad +$$

Zadana jednadžba ima oba korijena između -1 i $+1$ t. j. $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

3. $\frac{1}{2} < m < \infty$. Descartes-ov niz ima predznake

$$- \quad - \quad +$$

Jedan je korijen između -1 i $+1$.

Kako je $af(-1) > 0$, $af(1) < 0$ za promatrani interval, to je $-1 < x_1 < 1 < x_2$. Manji je korijen između -1 i $+1$.

Iz ovog proizlazi da zadana jednadžba ima dva rješenja, ako se „m" nalazi u intervalu $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ t. j. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$, a jedno rješenje izvan tog intervala t. j. $m < -\frac{1}{2}$ i $m > \frac{1}{2}$. Veći je korijen rješenje zadane jednadžbe za $m < -\frac{1}{2}$, a manji za $m > \frac{1}{2}$.

Ako je „m" jednako karakterističnim vrijednostima onda imamo:

1. $m = -\frac{1}{2}$ onda je $\cos x = -1$, $\cos x = \frac{1}{2}$

ili $x = (2k + 1)\pi$ i $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

2. $m = \frac{1}{2}$ onda je $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$

ili $x = 2k\pi$ i $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

gdje je ($k = 0$, ili bilo koji cijeli broj).

Marinović Ante, 3. g r. 7. g. Zagreb

430. *Riješi nejednadžbu*

$$\frac{3\cos x - 2}{4\cos^2 x - 1} < 1.$$

Izraz $\frac{3\cos x - 2}{4\cos^2 x - 1}$ prenesemo na desnu stranu nejednadžbe i sredimo. Izlazi:

$$1 - \frac{3\cos x - 2}{4\cos^2 x - 1} > 0 \quad \text{ili}$$

$$\frac{4\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2}{4\cos^2 x - 1} > 0,$$

što daje $\frac{4\cos^2 x - 3\cos x + 1}{4\cos^2 x - 1} > 0.$

Diskriminanta brojnika je negativna ($D = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7$); stoga će, s obzirom, da je koeficijent uz kvadratni član pozitivan, biti brojnik uvijek t. j. za svaku realnu vrijednost varijable isto pozitivan.

Da nejednadžba bude zadovoljena treba biti i nazivnik uvijek pozitivan t. j. treba biti $4\cos^2 x - 1 > 0$.

Otuda slijedi: $4\cos^2 x > 1$ ili $\cos^2 x > \frac{1}{4}$

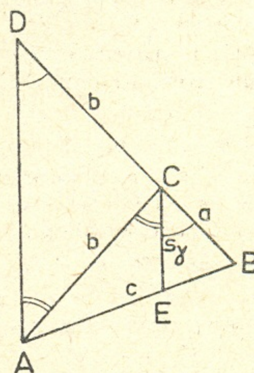
ili $\cos x < -\frac{1}{2}$ i $\cos x > \frac{1}{2}$.

Lukovi između 0 i 2π, koji zadovoljavaju tim nejednadžbama, jesu

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi.$$

Imenšek Mladen, 3. g r. 7. g. Zagreb

431. *Конструисати троугао коме је задано a, b и симетрала s_γ угла γ.*



Нека је то троугао ABC. Повуцимо, најпре $AD \parallel EC$ и продужимо страну a па ћемо добити равнокраки троугао ACD, јер је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCE$ и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACE$, а дато је већ да је $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE$.

Пошто је $\sphericalangle DAB$ сличан $\sphericalangle CED$ следује однос:

$$AD : s_\gamma = (a + b) : a, \quad \text{и одатле}$$

$$AD = \frac{s_\gamma (a + b)}{a}.$$

Дакле, AD налазимо као четврту пропорционалу па ћемо лако конструисати равнокраки троугао ACD. Ако затим из врха C овог троугла повучемо паралелу основици AD и на њој уочимо тачку E тако да је $CE = s_\gamma$ па кроз тачке A и E повучемо праву, у пресеку те праве с продужетком стране DC налазиће се треће теме B траженог троугла.

Да задатак буде могућ, мора да је $AD < 2b$ и одатле излази лако

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < \frac{1}{s_\gamma}.$$

Шелмић Ратко, сврш. уч. г. Прокупље

432. *Riješiti sistem iednadžbi:*

$$2x - 3y + z = -3$$
$$x - y + 2z = 2m - 1$$
$$x + 3y - 2z = 2m - 13.$$

a) Odrediti m tako da x, y i z budu pozitivni brojevi, zatim poređati te brojeve po veličini.

b) Vodeći računa o uslovu iz a) odrediti m tako da x, y i z budu stranice trokuta ABC.

c) Neka m zadovoljava prethodne uslove. Da li se može m odrediti tako da z bude hipotenuza, a x i y katete istog pravokutnog trokuta?

Riješivši zadani sistem jednadžbi dobivamo

$$x = m - 5 \qquad y = m - 2 \qquad z = m + 1$$

a) Da bi x, y, z bili u isto vrijeme pozitivni, mora biti $m > 5$.

b) U trokutu je najveća stranica manja od zbroja drugih dviju stranica. U našem slučaju je: $z < x + y$, t. j.

$$m + 1 < m - 5 + m - 2 \quad \text{ili} \quad m > 8.$$

c) Ako su x, y i z stranice pravokutnog trokuta, to je $(m + 1)^2 = (m - 5)^2 + (m - 2)^2$, rješavanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$m^2 - 16m + 28 = 0, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 14.$$

Budući da mora biti $m > 5$ zadovoljava samo $m_2 = 14$ pa su stranice $x = 9$, $y = 12$, $z = 15$.

Mitar Zdenko, 4. b r. 6. g. Zagreb

433. *Zadana su dva jednaka kruga polumjera r, koji se dotiču. Odredi geometrijsko mjesto točaka T, za koje tangente na oba kruga imaju stalan zbroj* λr $(\lambda > 2)$. *Diskusija dobivenog geometrijskog mjesta.*

Zadane kružnice k_1 i k_2 smjestimo u Descartes-ov koordinatni sustav tako da se dotiču u ishodištu, a središta da leže na osi x. Tada je $S_1(r, 0)$, $S_2(-r, 0)$.

Uzmimo točku $T(x, y)$ izvan kružnica. Imamo po Pitagori $t^2 = \overline{ST}^2 - r^2$.

Dužina je tangente na kružnicu k_1

$$t_1 = \sqrt{(x - r)^2 + y^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx + y^2}$$

a na kružnicu k_2

$$t_2 = \sqrt{(x + r)^2 + y^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx + y^2}$$

Tada po zadatku mora biti

$$t_1 + t_2 = \lambda r \qquad \text{t. j.}$$

$$\sqrt{x^2 - 2rx + y^2} + \sqrt{x^2 + 2rx + y^2} = \lambda r.$$

$$4(\lambda^2 - 4)x^2 + 4\lambda^2 y^2 = \lambda^4 r^2,$$

$$\frac{x^2}{\dfrac{\lambda^4 r^2}{4(\lambda^2 - 4)}} + \frac{y^2}{\dfrac{\lambda^2 r^2}{4}} = 1.$$

Geometrijsko mjesto traženih točaka T je dakle elipsa, kojoj su poluosi

$$a = \frac{r}{2}\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}, \quad b = \frac{r}{2}\lambda.$$

Diskusija. Da bi elipsa bila realna, mora biti $a > 0$, $b > 0$. To je uvijek ispunjeno kad je $\lambda > 2$. Za $\lambda = 2$ poluos a je neizmjerno velika, poluos $b = r$, pa elipsa degenerira u paralelne pravce $y = r$ i $y = -r$. Rješenje zadovoljava samo u intervalu $x_1 = -r$, $x_2 = = r$. Poluos a uvijek je $\geqq 2r$, jer je

$$(\lambda^2 - 8)^2 \geqq 0, \quad \lambda^4 \geqq 16\lambda^2 - 64, \quad \lambda^2 \geqq 4\sqrt{\lambda^2 - 4}$$

pa je $a \geqq 2r$, $b > r$. Ujedno razabiramo, da je uvijek $a > b$.

Marangunić Ljubo
svrš. uč. 4. r. g. »B. Ribar«, Zagreb

Riješili zadatke iz 4. broja

Andrić Ivan, 4. c razr. 5. g. Zagreb, 420, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 432; *Bazler Mikloš* 3. r. g. Sombor, 420, 421, 422, 423, 427, 428, (djel.), 429, 432; *Imenšek Mladen*, 3. g r. 7. g. Zagreb, 421, 422, 427, 430, 432; *Maček Vilko* 3. b r. 2. g. Ljubljana, 420, 421, 422, 423, 426, 427, 428, 429, 430, 432, 433; *Marangunić Ljubo*, svrš. uč. gimn. »Br. Ribar«, Zagreb, 420, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432 433; *Marinović Ante*, 3 g r. 7. g. Zagreb 421, 422, 423, 425, 426, 427, 429, 430, 432; *Matošin Špiro*, 4. d r. 5. gimn. Zagreb, 421, 427; *Mesihović Behđed*, svrš. uč. g. Mostar, sve zadatke; *Mitar Zdenko*, 3. b raz. 6. g. Zagreb, 421, 422, 427, 430, 432, *Paar Vladimir* 4. a r. g. »B. Ogri-

zović«, Zagreb, sve zadatke; *Ranđelović Nenad*, 2. razred gimnazije Ćuprija, 423; *Stanojević Jevrosima*, vanr. učenik 4. razred gimn. »Sv. Mark.«, Niš, 420, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 432; *Šabanac Alija* 3_2 raz. g. Mostar, 420, 421, 422, 423, 427, 430, (djel.) 431, 432, (djel.) *Šaub Krešo*, 3. b razr. 6. g. Zagreb, 421, 422, 427, 430, *Weisser Marijan*, 2. d raz. g. Slavonska Požega, 420, 421, 422; *Вечански Драгомир*, 4_2 р. г. Зрењанин, све задатке, 424 (дел.), *Лугомирски Драгослав*, 3_4 р. г. Крагујевац, све задатке изузевши 433; *Милашиновић Душан* свршени, уч. 4_2 р. г. Смед. Паланка. 420, 421, 422, 423, 427, 428, 429, 430, 432; *Нешић Милан* 3_3 р. г. Ћуприја, 421, 422, 427, 428, 429, 430, 432; *Оприцовић Серафим*, 2_2 раз. г. Неготин 421, 422, 423, 432; *Поточник Златко* сврш. уч. 2_5 14 беогр. г. 420, 421, 427, 431, 432, 433; *Хотомски Петар*, 1_2 р. 1 г. Зрењанин 420, 432; *Шелтић Ратко*, сврш. уч. г. Прокупље 421, 422, 425, 426, 427, 431, 432.

Naknadno stigla rješenja

Azinović Luka, 3_2 raz. g. Mostar, 421 (djel.), 427; *Delinić Krešimir*, 3 građ. T. Š. »R. B.«, Osijek, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428 (djel.), 431; *Imamović Munever*, uč. g. Gradačac, 420, 421, 422, 423, 425, 427, 428 (djel.), 430, 432; *Limburger Maćaš*, 3_4 r. g. Sombor, 420, 421, 422, 423, 427, 431, 432; *Matošin Špiro*, 4 d raz. 5 g. »B. Ogrizović«, Zagreb, 420, 422, 423, 425, 426, 428, 429, 430, 431, 432; *Pohar Florijan*, 3 b raz. gimn. Kranj, sve zadatke; *Вуксановић М. Миро*, уч. гимн. Никшић, 420, 422, 423, 427, 432; *Мирчевски Борис*, 3 кл. гимн. »Мирче Ацев«, Прилеп, 420, 421, 422, 423, 427, 428 (djel.),

D) Rješenje zadataka iz fizike

196. *Iz valjka visine H i polumjera R izreže se s jednog kraja koaksijalni valjak visine H/2 i polumjera baze R/2. Gdje se nalazi težište tog tijela?*

To je tijelo rotaciono homogeno pa se težište nalazi na osi valika.

Masa $\frac{1}{2} R^2 \pi H \cdot s$ donje polovice valjka ima težište u točki $\frac{H}{4}$. Masa

$$\left(\frac{1}{2} R^2 \pi H - \frac{1}{8} R^2 \pi H\right) s = \frac{3}{8} R^2 \pi H \cdot s$$

gornje polovice valjka ima težište u točki $\frac{3}{4}$

Sad nađemo ordinatu težišta (centra mase) tih dviju materijalnih točaka

$$Y_0 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$$

$$Y_0 = \frac{\frac{1}{4} H \cdot \frac{1}{2} R^2 \pi H \cdot s + \frac{3}{4} H \cdot \frac{3}{8} R^2 \pi H \cdot s}{\frac{1}{2} R^2 \pi H \cdot s + \frac{3}{8} R^2 \pi H \cdot s}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} H + \frac{9}{32} H}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}} = \frac{13}{28} H$$

$$Y_0 = \frac{13}{28} H.$$

Ordinatu težišta tih dviju materijalnih točaka možemo naći i na ovaj način: centralna udaljenost je $\frac{H}{2}$, a udaljenost donje točke od težišta označimo s x.

$$\frac{1}{2} R^2 \pi H \cdot s \cdot x = \frac{3}{8} R^2 \pi H \cdot s \left(\frac{H}{2} - x\right)$$

a rješenje te jednadžbe jest:

$$x = \frac{3}{14} H$$

Sad je ordinata težišta:

$$Y_0 = \frac{1}{4} H + \frac{3}{14} H = \frac{13}{28} H$$

$$Y_0 = \frac{13}{28} H$$

Paar Vladimir 4. a r. 5. gimn. »B. O.« Zagreb

197. *Između dviju kuća razapeto je uže dugo 11 metara. Razmak među kućama je 10 metara. Na sredini užeta obješena je svjetiljka teška 10 kp. Kolika je napetost užeta?*

Ako zanemarimo težinu užeta, onda je kosinus kuta između užeta i horizontalne spojnice objesišta jednak

$$\cos \varphi = \frac{10}{11}.$$

Napetost užeta Q je

$$Q = \frac{G}{2 \sin \varphi},$$

gdje je G težina svjetiljke, a

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{21}}{11},$$

pa je $$Q = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{11}} = 12 \text{ kp}$$

Andrić Ivan, 3. c r. 5. g. Zagreb

198. *Gustoća zraka kod 0° C i tlaka 760 mm Hg je $\rho = 0{,}001293\ g\ cm^{-3}$. Koliko teži 1 l zraka kod 27° C i tlaka 750 mm Hg?*

Iz enačbe plinskog stanja $p\ V = R\ T$ dobimo

$$\frac{p}{\rho T} = \text{const.},$$

pa je

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_{27}}{\rho_{27} T_{27}},$$

$$\frac{760}{0{,}001293 \cdot 273} = \frac{750}{\rho_{27} \cdot 300},$$

$$\rho_{27} = \frac{0{,}001293 \cdot 273 \cdot 750}{760 \cdot 300} = 0{,}0011612\ \text{g cm}^{-3}.$$

Masa m 1 l zraka je

$$m = \rho \cdot V = 0{,}0011612\ \text{g cm}^{-3} \cdot 1000\ \text{cm}^3 = 1{,}1612\ \text{g},$$

a težina 1 l zraka je 1,1612 p.

Maček Vilko, 3. b r. 2. g Ljubljana

199. *Koliki mora biti otpor R žice električnog kuhala s kojim se može 1 l vode od 20° C za 8 minuta dovesti do vrenja, ako pretpostavimo da se sva toplina dobivena električnom strujom iskoristi za grijanje vode? Kuhalo je priključeno na gradsku mrežu od 220 V.*

Kuhalo mora za 8 minuta izračiti toplinske energije

$$Q = m\,c\,t = 1 \cdot 1 \cdot 80 = 80\ \text{kcal},$$

t. j. kuhalo može izračiti svake sekunde

$$\frac{80000}{8.60} = 166{,}6\ \text{cal s}^{-1}.$$

Prema Joulovom zakonu koji glasi

$$Q = 0{,}24 \frac{V^2}{R} t$$

imamo:

$$\frac{Q}{t} = 0{,}24 \frac{V^2}{R}, \text{ ili } 166{,}6 = \frac{0{,}24 \cdot 220^2}{R},$$

t. j. $$R = \frac{0{,}24 \cdot 220^2}{166{,}6} = 69\ \Omega.$$

Petrović Ivan, 4. r. g. Koprivnica

200. *Zraka se svjetlosti reflektira na dnu staklene posude. Odrediti kut polarizacije, ako je a) posuda prazna, b) posuda napunjena vodom. Indeks loma za vodu $n_1 = 4/3$, a za staklo $n_2 = 3/2$.*

Po Brewsterievom zakonu je tg $\alpha = n$, kjer je α polarizacijski kot, a n pa indeks loma.

a) $\text{tg}\,\alpha = n_2 = {}^3/_2\ ;\ \alpha \approx 56°\,19'$

b) $\text{tg}\,\alpha = n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{{}^3/_2}{{}^4/_3} = \frac{9}{8}\ ;\ \alpha \approx 48°\,22'$

Maček Vilko, 3. b r. 2. g. Ljubljana

Riješili zadatke iz 4. broja

Andrić Ivan, 2. c 5. g. Zagreb, 196 (djel.) 197, 198, 199, 200 (djel); *Bazler Mikloš,* 3_4. r. g. Sombor, 197; *Bogovčič Franci,* svr. uč. g. Brežice, 190, 197, 199: *Imenšek Mladen,* 3. g r. 7. gimn. Zagreb, 199; *Maček Vilko,* 3. b raz. 2. g. Ljubljana, 196 (djel) 197, 198, 199, 200; *Marinović Ante,* 3. r. 7. g. Zagreb, 197, 198, 199: *Paar Vladimir,* 4. c raz. 5. g. »B. Ogrizović« Zagreb, sve zadatke; *Petrović Ivan,* 4. raz. g. Koprivnica, 196 (djel), 197, 198, 199; *Stanojević Jevrosima,* 4. raz. g. Niš, 197 (djel.), 200 (djel.).

Vježbe za učenike srednjih škola

1. Kongruentni brojevi. Kongruencije. Djeljivost brojeva

Uzmimo dva broja na pr. 37 i 23; ako je razlika tih dvaju brojeva 37 – 23 djeljiva nekim trećim brojem na pr. sa 7, t. j. ako je $\frac{37-23}{7}$ cio broj, kažemo, da su brojevi 37 i 23 *kongruentni* s obzirom na 7. Broj 7 zove se *modul,* te se označuje

$$37 \equiv 23\ (mod\ 7).$$

Tako je na pr. $25 \equiv 1\ (mod\ 8)$, $13 \equiv 4\ (mod\ 3)$.

Općenito je $a \equiv b\ (mod\ m)$, ako je $\frac{a-b}{m}$ jednako nekom cijelom broju q.

Izraz $a \equiv b\ (mod\ m)$ zovemo *kongruencija.* Također je kongruencija $3x \equiv 2\ (mod\ 5)$, a jedno njezino rješenje je $x = 4$, jer je $12 \equiv 2\ (mod\ 5)$.

Poučci o kongruencijama

1. *Ako su dva broja a i b kongruentni trećem broju c za modul m, oni su za isti modul i među sobom kongruentni.*

Ako je $a \equiv c\ (mod\ m)$, $b \equiv c\ (mod\ m)$, to je $\frac{a-c}{m} = q_1$, $\frac{b-c}{m} = q_2$ i $\frac{a-c}{m} - \frac{b-c}{m} = \frac{a-b}{m} = q_1 - q_2$ t. j. cio broj, pa je

$$a \equiv b\ (mod\ m).$$

2. *Ako lijeve i desne strane dviju ili više kongruencija, koje se odnose na isti modul, zbrojimo, dobivamo za taj modul valjanu kongruenciju.*

Ako je na pr.

$$13 \equiv 3\ (mod\ 5)$$
$$18 \equiv 8\ (mod\ 5)$$
$$-11 \equiv 4\ (mod\ 5)$$

tad je i $13 + 18 - 11 \equiv 15$ (*mod* 5) ili $20 \equiv 15$ (*mod* 5). Općenito iz $a_1 \equiv b_1$ (*mod m*), $a_2 \equiv b_2$ (*mod m*), $a_3 \equiv b_3$ (*mod m*) . . . izlazi

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \equiv b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ (*mod m*).

3. *Kongruencija ostaje valjana, ako svaku njezinu stranu pomnožimo istim brojem.*

Ako je $a \equiv b$ (*mod m*) onda je i $na \equiv nb$ (*mod m*). Tako na pr. iz $12 \equiv 5$ (*mod* 7) izlazi $36 \equiv 15$ (*mod* 7).

4. *Dvije se kongruencije, koje se odnose na isti modul, mogu oduzeti.*

Ako je na pr.

$$a \equiv b \ (mod\ m), \quad c \equiv d \ (mod\ m),$$

tad je $a - c \equiv b - d$ (*mod m*) jer je uz dane pretpostavke $\frac{a-c}{m} - \frac{b-d}{m}$ cio broj.

5. *Ako se lijeve i desne strane više kongruencija, koje se odnose na isti modul, među sobom pomnože, dobiva se za isti modul valjana kongruencija.*

Ako je $a_1 \equiv b_1$ (*mod m*), $a_2 \equiv b_2$ (*mod m*), $a_3 \equiv b_3$ (*mod m*) . . . , to je i $a_1a_2a_3 \equiv b_1b_2b_3 \ldots$ . . . (*mod m*). To je zato, jer iz $a_1 = b_1 + mq_1$, $a_2 = b_2 + mq_2$, $a_3 = b_3 + mq_3$ izlazi $a_1a_2a_3 \equiv b_1b_2b_3 + mQ$, gdje je Q neki cio broj.

Odatle izlazi

$$a_1a_2a_3 \equiv b_1b_2b_3 \ (mod\ m).$$

Tako na pr. iz $5 \equiv -1$ (*mod* 6), $10 \equiv 4$ (*mod* 6), $4 \equiv -2$ (*mod* 6) izlazi

$$200 \equiv 8 \ (mod\ 6).$$

6. *Kongruencija ostaje valjana, ako se obje njezine strane podignu na istu potenciju.* Iz

$$4 \equiv -1 \ (mod\ 5) \text{ izlazi}$$
$$16 \equiv 1 \ (mod\ 5),$$
$$64 \equiv -1 \ (mod\ 5) \text{ i t. d.}$$

7. *Ako oba člana a i b kongruencije*

$$a \equiv b \ (mod\ m)$$

imaju najveću zajedničku mjeru M, koja je prosta prema m, dobija se valjana kongruencija, ako obje njezine strane podijelimo s M.

Iz $a = \alpha M$, $b = \beta M$, izlazi da je

$$\frac{a-b}{m} = \frac{M(\alpha - \beta)}{m}$$

cio broj. Kako je po pretpostavci M relativno prosto prema m, izlazi da $\alpha - \beta$ mora biti djeljivo s m, što znači da je $\alpha \equiv \beta$ (*mod m*).

Ako pak M i m imaju zajedničku mjeru δ, to je $M = \delta M_1$, $m = \delta m_1$, gdje su M_1 i m_1 relativno prosti brojevi, to je

$$\frac{M(\alpha - \beta)}{m} = \frac{M_1(\alpha - \beta)}{m_1}$$

cio broj pa se mora m_1 nalaziti u $\alpha - \beta$ t. j.

$$\alpha \equiv \beta \ (mod\ m_1) \text{ ili } \alpha \equiv \beta \left(mod\ \frac{m}{\delta}\right).$$

Tako na pr. iz $24 \equiv 10$ (*mod* 7) izlazi $12 \equiv 5$ (*mod* 7), dok iz $24 \equiv 15$ (*mod* 9) izlazi $8 \equiv 5$ (*mod* 3), a nije $8 \equiv 5$ (*mod* 9).

8. Ako je $a \equiv b$ (*mod* m_1), $a \equiv b$ (*mod* m_2), $a \equiv b$ (*mod* m_3), i ako je $m = v\,(m_1, m_2, m_3)$, to je i $a \equiv b$ (*mod m*).

Svaki se od brojeva m_1, m_2, m_3 nalazi u $a - b$, pa se i njihov najm. zajed. višekratnik nalazi u $a - b$.

Primjena kongruencije na postavljanje pravila o djeljivosti brojeva

Neka je N zadan dekadski broj, on se može pisati

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

gdje je a_0 znamenka jedinica, a_1 znamenka desetica, a_2 znamenka stotica i t. d.

Kako je $10 \equiv 0$ (*mod* 2), $10^2 \equiv 0$ (*mod* 2) . . . , to je $N \equiv a_0$ (*mod* 2), što znači, *da je broj djeljiv s 2 kad mu je znamenka jedinica djeljiva s 2.*

Kako je

$$10^2 \equiv 0 \ (mod\ 4), \quad 10^3 \equiv 0 \ (mod\ 4) \ldots,$$

to je $N \equiv a_1 10 + a_0$ (*mod* 4) t. j.

Broj je djeljiv s 4, kad mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4. Slično vrijedi i za 25.

Kako je

$$10 \equiv 2 \ (mod\ 4),$$

to je također

$$N \equiv 2a_1 + a_0 \ (mod\ 4), \text{ t. j.}$$

Broj je djeljiv s 4, kad mu je zbroj od dvostruke znamenke desetica i znamenke jedinica djeljiv s 4.

Kako je

$$10^3 \equiv 0 \ (mod\ 8), \quad 10^4 \equiv 0 \ (mod\ 8), \ldots,$$

to je $N \equiv 100a_2 + 10a_1 + a_0$ (*mod* 8) t. j.

Broj je djeljiv s 8, ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8.

Slično vrijedi za 125.

Kako je $100a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv 4a_2 + 2a_1 + a_0$ (*mod* 8), to je *broj djeljiv s 8, kad mu je zbroj od 4-struke znamenke stotica, dvostruke znamenke desetica i znamenke jedinica djeljiv s 8.*

Mjesto $4a_2$ možemo pisati i $-4a_2$

Na pr. 52152 je djeljivo sa 8, jer je $4 + 10 + 2 = 16$ djeljivo s 8 ili $-4 + 10 + 2 = 8$ djeljivo s 8.

Kako je $10 \equiv 1 \pmod 9$, $10^2 \equiv 1 \pmod 9$, $10^3 \equiv 1 \pmod 9, \ldots$, to je

$$N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

To nam kazuje: *Broj je djeljiv s 9, kad mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.*

Također izlazi odatle: *Ostatak, što ga dobijemo, kad neki broj podijelimo s 9 isti je, kad mu zbroj znamenaka podijelimo s 9.*

Tako na pr. ostatak, što ga dobijemo, kad 527324 podijelimo s 9 isti kao kad $5 + 2 + 7 + 3 + 2 + 4 = 23$ podijelimo s 9, ili kad $2 + 3$ podijelimo s 9. Taj je ostatak dakle jednak 5.

Kako je

$$10 \equiv -1 \pmod{11},\quad 100 \equiv 1 \pmod{11},\quad 1000 \equiv -1 \pmod{11}, \ldots,$$ to je

$$N \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \pmod{11}.$$

To nam kazuje: *Broj je djeljiv s 11, kad mu je razlika između zbroja znamenaka na neparnim i parnim mjestima djeljivo s 11.*

Također izlazi: *Ostatak, što ga dobijemo, kad neki broj podijelimo s 11, isti je, kao kad razliku između zbroja znamenaka na neparnim i parnim mjestima podijelima s 11.*

Kako je $10 \equiv 3 \pmod 7$, $100 \equiv 2 \pmod 7$, $1000 \equiv -1 \pmod 7$, $10^4 \equiv -3 \pmod 7$, $10^5 \equiv -2 \pmod 7$, $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, $10^7 \equiv 3 \pmod 7, \ldots$, to je

$$N \equiv (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - (a_9 + 3a_{10} + 2a_{11}) \ldots \pmod 7.$$

Na pr. 523425 je djeljivo sa 7, jer je

$$(5 + 6 + 8) - (3 + 6 + 10) = 19 - 19 = 0$$

djeljivo sa 7. Broj je djeljiv sa 7.

Neka zgodna pravila o djeljivosti brojeva s određenim brojevima mogu se dobiti da se ti brojevi napišu u obliku $N = 10A + B$, gdje je B broj jedinica tog broja, a A broj, koji se dobije iz N, ako mu se izostave jedinice.

1. *Djeljivost s brojem* 7. Kako je

$$1 \equiv -6 \pmod 7,\quad 10 \equiv 3 \pmod 7,$$ to je

$$N \equiv 3A - 6B \equiv 3(A - 2B) \pmod 7.$$

Kako je 3 prosto prema 7, N bit će djeljivo sa 7, kad je $A - 2B \equiv 0 \pmod 7$.

Na pr. 1351 je djeljivo sa 7, kad je $135 - 2 = 133$ djeljivo sa 7, 133 je djeljivo sa 7, jer je $13 - 6 = 7$ djeljivo sa 7. Dakle 1351 e djeljivo sa 7.

2. *Djeljivost s brojem* 13. Kako je

$$1 \equiv -12 \pmod{13},\quad 10 \equiv -3 \pmod{13}$$

to je

$$N \equiv -3A - 12B \equiv -3(A + 4B) \pmod{13}.$$

Na pr. 1729 je djeljivo s 13, ako je $172 + 36 = 208$ djeljivo s 13, a 208 je djeljivo s 13, kad je $20 + 32 = 52$ djeljivo s 13, 52 je djeljivo s 13, pa je i 1729 djeljivo s 13.

3. *Djeljivost s brojem* 19. Za modul 19 možemo pisati

$$1 \equiv -18 \pmod{19},\quad 10 \equiv -9 \pmod{19},$$

pa je

$$N \equiv -9A - 18B \equiv -9(A + 2B) \pmod{19}.$$

Dakle je N djeljivo s 19, ako je

$$A + 2B \equiv 0 \pmod{19}.$$

Na pr. 4484 je djeljivo s 19, ako je 456 ili ako je 57 djeljivo sa 19; 57 je djeljivo sa 19, pa je 4484 djeljivo s 19.

Broj N može se pisati i u obliku

$N = 100A + B$, gdje je B broj, koji se sastoji iz desetica i jedinica broja N, a A broj, koji nastane, kad u N izostavimo desetice i jedinice.

Za neke module nalazimo opet neka jednostavna pravila o djeljivosti brojeva.

4. *Djeljivost s brojem* 7. Kako je

$$100 \equiv 2 \pmod 7,$$

to je

$$N = 100A + B \equiv 2A + B \pmod 7.$$

Na pr. 9443 je djeljivo sa 7, ako je $188 + 43 = 231$, a taj je broj djeljiv sa 7, ako je $4 + 31 = 35$ djeljiv sa 7. Dakle je 9443 djeljivo sa 7.

Može se također pisati:

$$1 \equiv -6 \pmod 7,\quad 100 \equiv 2 \pmod 7,$$

pa je

$$N \equiv 2A - 6B \equiv 2(A - 3B) \pmod 7,$$

8813 je djeljivo sa 7, ako je $88 - 39 = 49$ djeljivo sa 7. Dakle je 9443 djeljivo sa 7.

5. *Djeljivost s brojem* 11. Kako je

$$100 \equiv 1 \pmod{11},$$

to je $$N \equiv A + B \pmod{11}.$$

Na pr. 3245 je djeljivo s 11, ako je $32 + 45 = 77$ djeljivo s 11; 57442 je djeljivo s 11, ako je $574 + 42 = 616$, t. j. ako je $6 + 16 = 22$ djeljivo s 11.

6. *Djeljivost s* 13. Kako je

$$100 \equiv -4 \pmod{13},$$

to je $$N \equiv -4A + B \pmod{13}.$$

Na pr. 4238 je djeljivo s 13, ako je

$$-168 + 38 = -130$$

djeljivo s 13.

7. *Djeljivost sa* 17. Kako je

$$100 \equiv -2 \ (mod\ 17),$$

to je

$$N \equiv -2A + B = -(2A - B) \ (mod\ 17).$$

Na pr. 43265 je djeljivo sa 17, ako je 864 — 65 = 799 t. j. ako je 14 — 99 = — 85 djeljivo sa 17. Dakle je broj djeljiv sa 17.

Jednostavno pravilo za djeljivost nekog broja sa 7, 11, 13 dobivamo, ako napišemo $N = 1000A + B$.

Kako je

$$1000 \equiv -1 \ (mod\ 7), \quad 1000 \equiv -1 \ (mod\ 11)$$

$$1000 \equiv -1 \ (mod\ 13),$$ to je

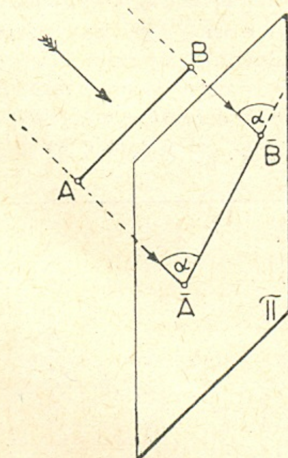
$$N \equiv -A + B = -(A - B) \ (mod\ 7, 11, 13),$$

184338 djeljivo je sa 7, 11, 13, ako je 338 — — 184 = 154 djeljivo sa 7, 11, 13. Taj je broj djeljiv sa 7 i s 11, ali nije s 13.

1036178 djeljivo je sa 7, 11, 13, ako je 1036 — 178 = 858 djeljivo sa 7, 11, 13. Taj je broj djeljiv s 11 i s 13, ali nije sa 7, pa je zadani broj djeljiv s 11 i s 13, a nije sa 7.

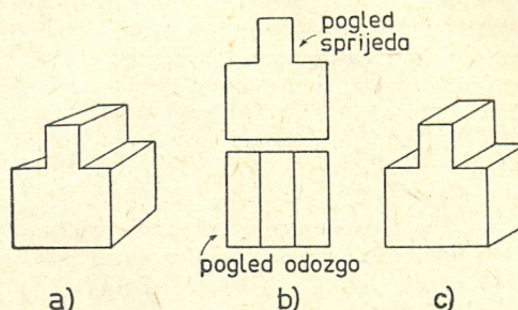
2. Kosa projekcija

I. Uvod: Nacrtna (deskriptivna) geometrija je nauka, koja nas uči predočiti (i istraživati) prostore, geometrijske lukove (i tijela) i njihove odnose. U to ime ima i svoje metode rada.



Sl. 1.

Obrađujući početke nacrtne geometrije u našem listu u prošlogodišnjem 1. broju (na početku) prikazujući metodu nacrtne geometrije i vrste projiciranja kazali smo ovo o kosokutnom (ili klinagonalnom) projiciranju (sl. 1): U ovom projiciranju povlačimo kroz točku prostora A kos pravac prema ravnini projekcija (π) pod kakvim god kutom α. Taj kut α ostaje za cijelo projiciranje (svake nove točke) isti. Probodište kosog pravca s π je $\bar{A}$ i to je kosa projekcija točke A na ravninu π uz kut α. Slično je za točku B i svaku novu točku.



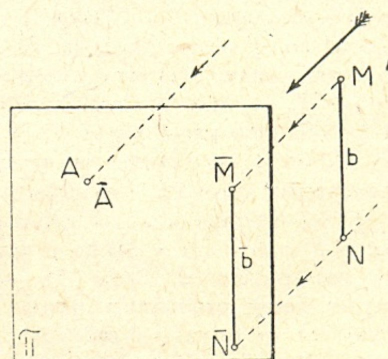
Sl. 2.

U sl. 2. prikazan je isti predmet (vez drvene građe) u perspektivi (a) ortogonalnoj projekciji (b) i kosoj projekciji (c). Vidimo, da je perspektivna slika plastična (zorna) ali nije metrična, ortogonalna projekcija je metrična (ali nije plastična) — a kosa projekcija toga predmeta je neka sredina između prve dvije. Ona je plastična (ali ne kao perspektivna slika) i metrična (ali ne onoliko kao ortogonalna projekcija). Ovdje ćemo prikazati potanje koso projiciranje i primjenu toga na predočivanje tijela.

Budući je dojam koji ostavlja kosa slika predmeta otprilike takav kao kod perspektive neki zovu kosu projekciju i *paralelnom perspektivom*.

II. Pravila za koso projiciranje: Pojam kosog projiciranja ponovili smo u uvodu. S tim je data i projekcija točke. Evo daljnjih saznanja o tome:

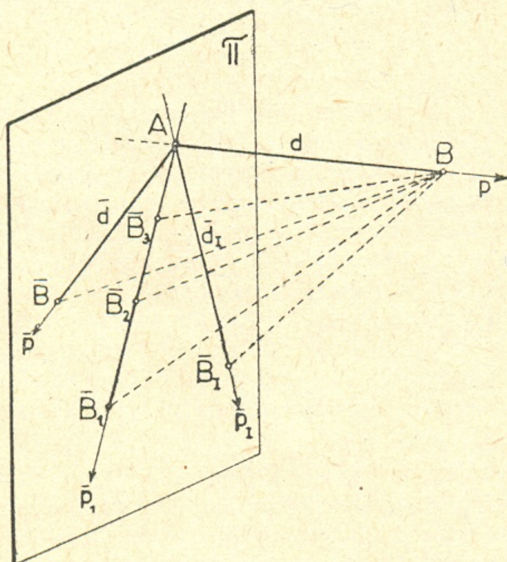
1. U sl. 3. je u ravnini π točka A, a dužina b je $\parallel$ sa π. Kosa slika točke A bit će sama



Sl. 3.

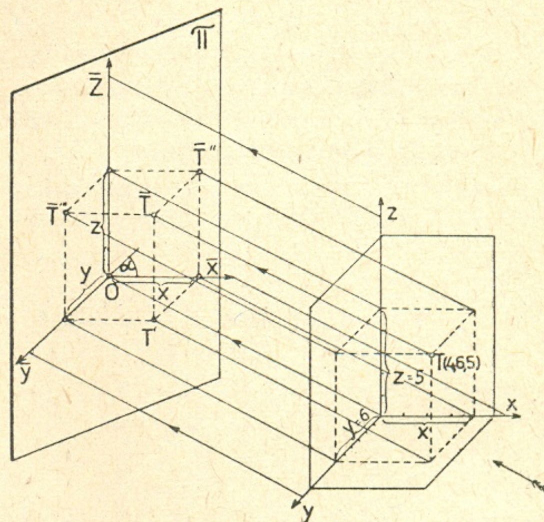
ona t. j. $\bar{A} \equiv A$. Kosa slika dužine b je $\bar{b}$ i $\bar{b} \parallel b$. — Nadalje vidimo iz slike i odnosa u njoj da je $\bar{b} = b$.

2. U sl. 4. je dužina $\overline{AB}$ kosa prema π i krajem A je u π, a leži u pravcu p. Smjer kose slike pravca p ($\bar{p}$, $\bar{p}_1$, $\bar{p}_I$ . . .) ovisi o smjeru projicirajućih zraka kroz taj pravac. — Kosa slika dužine toga pravca u istom smjeru pravca p bit će veća ili manja što ovisi o smjeru projicirajuće zrake kroz B (drugi kraj dužine). Ako je ona pod manjim priklonim kutom prema π slika dužine bit će veća, a što je prikloni kut veći slika dužine je sve manja. — Ako je kut projicirajuće zrake prema π jednak priklonom kutu pravca p dužina će se projicirati u točku. (Razmotri sl. 4. i uporedi $\bar{p}$, $\bar{p}_1$ i $\bar{p}_I$ prema p, a zatim $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$ i $\overline{AB_3}$ prema AB)



Sl. 4.

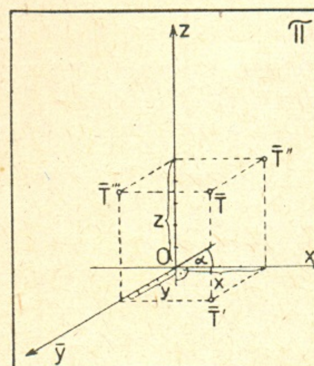
3. *Predočavanje točke u kosoj projekciji* (sl. 5. U sl. 5a skicirana je ravnina π i uzeta u prostoru pred njom točka T. — Točka prostora je određena ako je vezana za stalan pravokutni koordinatni sustav. (Tri pravca međusobno okomita) x, y, z, koji počinje u točki O. Osi x i z uzeli smo paralelno sa π. — Naša točka T daleko je od ravnine yz u smjeru x osi za apscisu x (ovdje 4) u smjeru osi y daleko je od ravnine xz za ordinatu y (ovdje 6) a u smjeru osi z daleko je od ravnine xy za aplikatu z (ovdje 5). — Uz zadan smjer kosog projiciranja nastaje u π kosa slika. Tu su osi x i z zadržale međusobno pravi kut, a dužine po x i z ostale su jednako velike ($x = 4$, $z = 5$) jer su os paralelne sa π.



Sl. 5. a)

Kosa slika osi y, koja je kosa prema π ima svoj posebni smjer ovisan o smjeru projicirajuće zrake a i na njoj dužina y može da bude različna od 6.

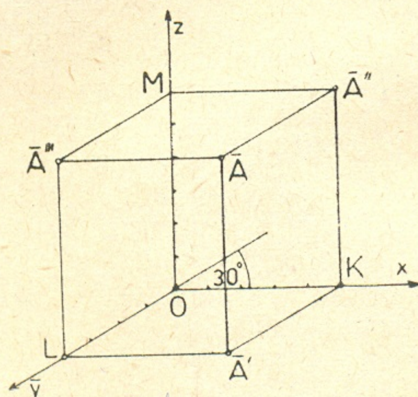
U sl. 5b prikazana je kosa projekcija nastala u ravnini π — ali ne više u skici nego kako ona stvarno izgleda. Imamo slike osi x i z pod pravim kutom i po njima (počev od O) javljaju se dužine 4 i 5 u originalu. — Kosa slika prostorne osi y je $\bar{y}$ koja zatvara kut α sa $+x$ (pozitivnim smjerom osi x). — Taj je ovisan o smjeru kosih zraka pravca pa može da se kreće $0° < \alpha < 360°$. — Kosa slika dužine po osi y (ovdje 6) je manja od



Sl. 5. b)

nje u originalu (pa može biti $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_5$ . . .) ili je jednaka njoj (1) ili je veća od nje ($1^1/_2$. 2, 3 . . .) što ovisi o priklonu kose zrake prema π,

Kosa projekcija ovisi dakle o kutu α koji čini $\bar{y}$ sa $+x$ i o kutu pod kojim su nagnute kose zrake prema π ili drugim riječima o prikrati. Razne kombinacije za kut α (za koji se obično uzima 30°, 45°, 60° i dr.) i za prikratu ($^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, 1 i dr.) daju razne vrste kose slike istog predmeta.



Sl. 6.

Vježba: Predoči u kosoj projekciji točku A (5, 8, 6) ako je α = 30° a prikrata $^1/_2$. — (sl. 6)

Rješenje: Povučem poluzraku Ox i postavim na nju okomicu u O i to je os z. — Pod kutom 30° prema $+x$ nacrtam $\bar{y}$. — Nanesem po osi x (počev od O) 5 (dobijem K), a po osi z (počev od O) 6 (dobijem M) dok po osi y odmjerim (od O) samo 4 (polovicu jer je prikrata $^1/_2$) i dobijem L. Nakon toga sastavim figuru kao u sl. 6. i ona daje kosu sliku točke A.

Napomena: Nije potrebno crtati cijelu figuru ako se hoće samo $\bar{A}$. na pr.: dosta je odmjeriti OK, iz $K \parallel \bar{y}$ i na njoj odmjeriti $K\bar{A}$ (jednak OL) i iz $\bar{A}' \parallel z$ pa na nju prenijeti $\bar{A}'\bar{A}$ (= OM)· — Iz gornje slike se osim kose slike (A) vide i kose slike projekcija na π_1, π_2 i π_3 ($\bar{A}'$, $\bar{A}''$, $\bar{A}'''$).

Na kraju ovih razmatranja i saznanja vidimo da imamo ova *pravila za koso projiciranje:*

1. Kut α što ga čini os $\bar{y}$ sa $+x$ stalan je za cijelu sliku; isto tako stalna je za cijelu sliku i prikrata po osi $\bar{y}$ koja je izabrata.

2. Točka u ravnini slike je istovremeno i njezina kosa projekcija.

3. Sve dužine koje su u prostoru paralelne sa osi y u kosoj projekciji paralelne su sa smjerom $\bar{y}$.

4. Dužina usporedna sa π ima kosu sliku paralelnu s originalom i jednaku originalu.

5. Dužina $\overline{AB}$ u prostoru koso položena prema π (ravnini slike) ima kosu projekciju veću ili manju od $\overline{AB}$ (ili joj jednaku). — Veličina zavisi o položaju kosih zraka prema π.

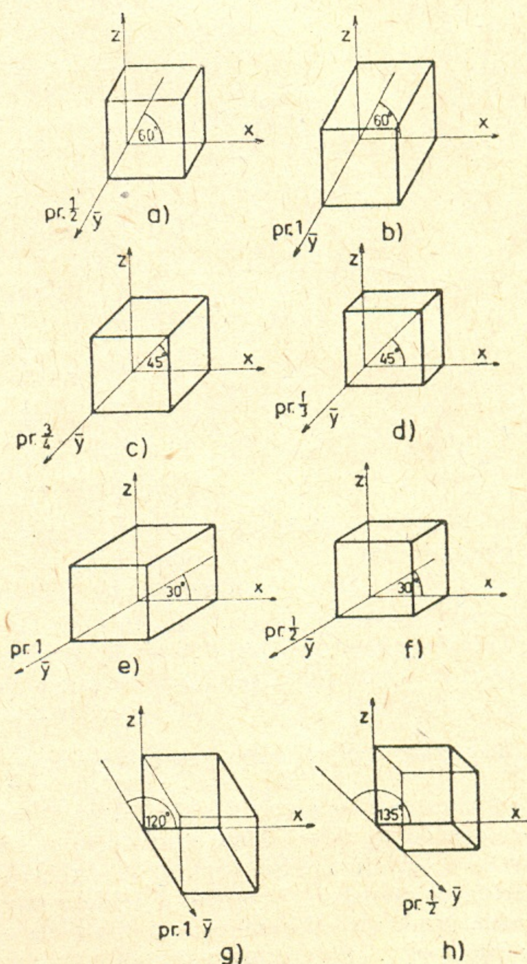
6. Paralelne i jednake dužine imaju kose projekcije paralelne i jednako velike.

7. Ako točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ po određenom omjeru onda će i $\bar{C}$ dijeliti kosu sliku $\overline{AB}$ po istome omjeru.

8. Sama kosa slika točke ($\bar{A}$) ne određuje položaj točke u prostoru (A). — [Za pobliže određenje točke $\bar{A}$ zadaje se još $\bar{A}'$ ili $\bar{A}''$. — Izuzetak su točke koje su u ravnini π_1, π_2 ili π_3] Ovo vrijedi i za dužinu, lik.

III. Predočivanje tijela u kosoj projekciji:

1. Nekolike kombinacije kuta α i prikrate po osi y na slici kocke (sl. 7.), Prema ovoj slici vidimo da su najljepše slike uz α = 30° ili 45° a uz prikratu $^1/_2$ ili $^1/_3$. — Prikrata 1



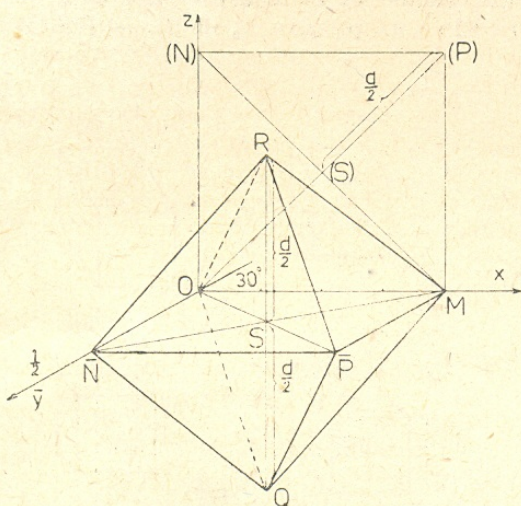
Sl. 7.

daje izduženu sliku. Kada je $\alpha = 45°$ a prikrata 1 takva kosa projekcija zove se *kavalirska perspektiva*. Služi u vojne svrhe u nauci o fortifikaciji. Savršeno je metrična i u njoj su veoma jednostavne konstrukcije. — Manjkavost joj je jedino to što su predmeti prikazani u njoj nešto izduženi. U sl. g i h imamo prikazane predmet uz pogled ozdo.

2. Nacrtaj oktaedar (brid $a = 4$ cm) u kosoj projekciji ($\alpha = 30°$, pr. 1/2 (sl. 8.).

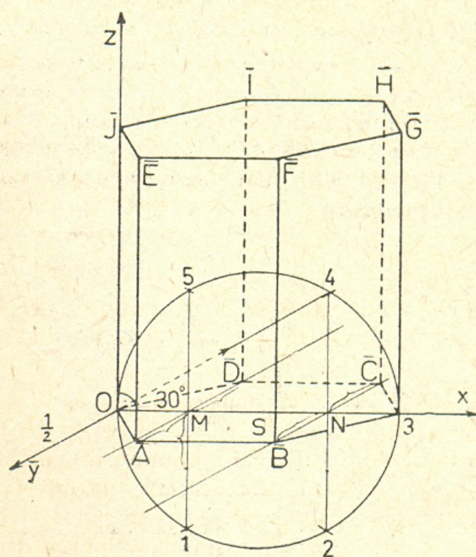
Rješenje: Nacrtam koordinatni sistem $Oxz\bar{y}$. — Uzmem točku O i iz nje os x desno i na nju iz $O \perp$ os z. Treću os $\bar{y}$ uzmem pod kutom od 30° prema $+x$.

Po osi x nanesem od O desno 4 cm i dobijem točku M, a po osi $\bar{y}$ odmjerim od O dalje 2 cm (prikrata 1/2 od 4 cm i eto točke $\overline{N}$. Iz $OM\overline{N}$ paralelama dobijem točku $\overline{P}$. To je



Sl. 8.

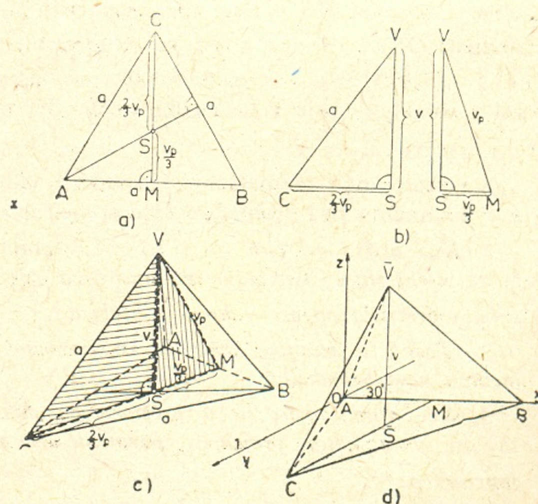
središnji presjek oktaedra. Poznato nam je da oktaedar ima 3 osi međusobno okomite i jenako duge. One su dijagonale kvadratičnih presjeka oktaedra. U slici su one $\overline{OP}$ i $\overline{MN}$. Trebamo pravu veličinu dijagonale. U to ime nacrtam kvadrat $OM\ (P)(N)$ nad osi x i njegova dijagonala je prava veličina oktaedrove dijagonale. Uzmem samo pola dijagonale $\left(\frac{d}{2}\right)$ i prenesem je na paralelu s osi z kroz $\overline{S}$ gore i dolje od te točke. Time sam dobio R i Q vrhove oktaedra koji spojeni sa vrhovima srednjeg presjeka daju ostalih 8 bridova oktaedra. Na kraju odijelim vidljivi dio tijela od nevidljivog tako da bridove prvoga izvučemo, deblje, a one drugoga isčrtkamo.



Sl. 9.

3. Nacrtaj u kosoj projekciji ($\alpha = 30°$ prikr. 1/2) pravilnu šesterostranu prizmu $a = 2{,}5$ cm, $v = 5$ cm (sl. 9.). Rješenje: Postavim koordinatni sustav $O\,x\,z\,\bar{y}$.

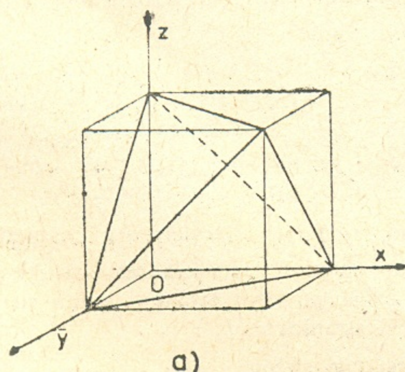
Uzmem u šestar 2,5 cm (r) zabodem ga u osi x u točki S tako da je $\overline{SO} = 2{,}5$ cm i opišem kružnicu iz S. Podijelim kružnicu na šest dijelova počev od O tako da dužinu $\overline{SO}$ prenašam okolo (kao konstrukcija šesterokuta). Dobio sam točke 1, 2, 3, 4 i 5. (To je slika šesterokuta zaokrenuta oko $\overline{O3}$ u ravninu xz). Vrhovi O i 3 su u ravnini slike i tu im je i kosa slika. — Spojim $\overline{15}$ i $\overline{24}$ i to mi daje na osi x točke M i N. Spojnice $\overline{15}$ i $\overline{24}$ tre-



Sl. 10.

bam prenijeti u kosu projekciju. U to ime kroz M i N povučem paralele sa $\overline{y}$ i uzmem pola dužine $\overline{M1}$ (ili $\overline{N2}$) pa prenesem od M (ili N) na ove paralele. To mi daje točke $\overline{A}$, $\overline{D}$ i $\overline{B}$, $\overline{C}$. Redom spajam i eto baze prizme koja je šesterokut $O\overline{A}\overline{B}$ 3 $\overline{C}\overline{D}O$. — U tim točkama povučem paralele s osi z i na njih odmjerim 5 cm (jer ostaju u naravnoj veličini kao ‖ sa π). Time dobijem točke $\overline{E}\overline{F}$-$\overline{G}\overline{H}\overline{I}\overline{J}$ koje spojene daju gornji šesterokut (bazu) tražene prizme. — Konačno odijelim vidljivi dio od nevidljivoga.

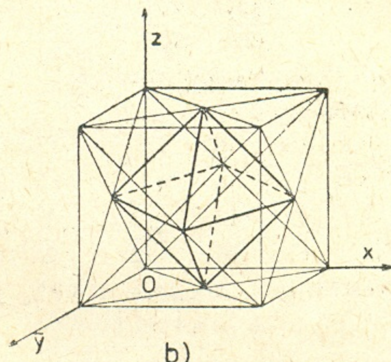
4. Prikaži u kosoj projekciji ($\alpha = 30°$ prikrata 1) tetraedar ($a = 5{,}4$ cm) (sl. 10.) Da možemo ovo riješiti moramo provesti neka razmatranja. U sl. 10a nacrtali smo istostran trokut ($a = 5{,}4$) koji je jedna pobočka tetraedra i u njoj povukli visine iz vrha C i A. — U sl. 10b skiciran je tetraedar i zamišljeni ravni presjek kroza nj CMV u kojem je i visina tetraedra. — Vidimo da je ta visina kateta dvaju pravokutnih trokuta i to prednjega CSV i stražnjega SMV. U sl. 10c ti su trokuti konstruirani na temelju veličina iz sl. 10a. Time smo dobili sve elemente za prikaz tetraedra u kosoj projekciji. Uzmem koordinatni sustav $Oxz\overline{y}$ (sl. 10d). Na os x prenesem (iz sl. 10a) dužinu AB i iz točke M te dužine povučem paralelu sa $\overline{y}$ pa na nju prenesem iz iste slike $\overline{MS}$ i $\overline{MC}$. Dobio sam točke $\overline{S}$ i $\overline{C}$. Spojnice $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ daju bazu tetraedra. U $\overline{S}$ povučem paralelu sa z i prenesenu iz 10c na nju visinu tetraedra v što mi daje $\overline{V}$ a on spojen s A, B i $\overline{C}$ daje konačnu sliku tetraedra. — Izvučemo posebno vidljive bridove jače.



Sl. 11. a)

5. Crtanje tetraedra i oktaedra iz kocke u kosoj projekciji. U sl. 11a prikazan je tetraedar a sl. 11b prikazan je oktaedar. — Obje slike dobivene su iz slike kocke.

Da dobijemo tetraedar nacrtamo kocku i povučemo u donjoj i gornjoj bazi te kocke suprotne dijagonale. Zatim spojimo krajeve tih dijagonala. To daje tetraedar.



Sl. 11. b)

Da dođemo do slike oktaedra nacrtamo kocku i u toj kocki pomoću dijagonala pobočaka nađemo središte tih pobočaka. Spojnice susjednih središta daju bridove oktaedra (napomena: iz slike kocke može se dobiti i kosa slika pentagonal-dodekaedra i pravilna ikozaedra. Kako se i ova tijela crtaju dat ćemo kasnije obavještenja).

prof. *Dragan Mutabžija*

Vježbe za učenike osmog razreda osnovne škole

1. Izračunaj:

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)4:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:$$

$$:62\frac{1}{20}+\left(2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right):1\frac{77}{228}.$$

Brojnik prvog razlomka u zagradi jest 500, nazivnik $1{,}6:\frac{1}{5}=8$: zato je prvi razlomak $\frac{125}{2}$: brojnik drugog razlomka je 0,225, nazivnik $\frac{1}{2}$, zato je drugi razlomak $\frac{9}{20}$. Prvi je pribrojnik

$$\left(\frac{125}{2}-\frac{9}{20}\right):\frac{1241}{20}=1.$$

U drugom je pribrojniku izraz u zagradama jednak

$$\frac{11}{4}+\frac{175}{38}-\frac{2}{3}=\frac{627+1050-152}{228}=\frac{1525}{228};$$

zato je drugi pribrojnik jednak

$$\frac{1525}{228}\cdot\frac{228}{305}=5.$$

Cijeli je izraz dakle jednak 6.

2. Uvjeri se da je

$$\left(\frac{2\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{1}{2\frac{1}{2}}\right):\frac{1}{1\frac{1}{2}}=\frac{9}{10}.$$

3. Odredi broj, od koga je 4,8 % jednako

$$\frac{6+8{,}4:0{,}1}{\left(2:0{,}3-4\frac{2}{3}\right)\cdot 0{,}3125}.$$

Lako se nalazi da je taj izraz jednak 144; ako je 4,8 % nekog broja jednako 144, 1 % tog broja jednako je $\frac{144}{4{,}8}=30$, a broj je jednak 3000.

4. Uvjeri se da je

$$\sqrt{\left(4-2\frac{510}{697}+\frac{7\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}\right):\frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}}=2.$$

5. Izračunaj

$$A=-4a^3-\{-2a^2-[8-$$
$$-(-5a^3-4a^2)+6a-5]-6a^2\}.$$

Pokus za $a=-2$.

Zagrada se možemo riješiti postepeno t. j. najprije okruglih, zatim uglastih i onda vitičastih ali i svih odjednom. U tom posljednjem slučaju imamo:

$A=-4a^3+2a^2+8+5a^3+4a^2+6a-5+$
$+6a^2=a^3+12a^2+6a+3.$

Pokus: treba $a=-2$ staviti u zadani izraz i izračunati ga. Imamo

$$A=-4(-8)-$$
$$-\{-8-[8-(40-16)-12-5]-24\}=$$
$$=32-\{-8-(8-24-17)-24\}=$$
$$=32-\{-8+33-24\}=32-1=31.$$

Uvrstimo li za $a=-2$ u rezultat, izlazi

$$-8+48-12+3=31,$$

dakle se pokus slaže.

6. Izračunaj: $A=(6a-5b)^2-(4a-3b)^2-$
$-(5b-6a)(6a+5b)$.

Pokus za $a=4$, $b=-3$.

$(5b-6a)(6a+5b)=(5b-6a)(5b+6a)=$
$=25b^2-36a^2$, $(6a-5b)^2-(4a-3b)^2$
je također razlika kvadrata, pa je jednako
$[(6a-5b)+(4a-3b)]\,[(6a-5b)-(4a-3b)]=$
$=(10a-8b)(2a-2b)=20a^2-36ab+$
$+16b^2$, pa je $A=20a^2-36ab+16b^2-$
$-25b^2+36a^2=56a^2-36ab-9b^2$.

Pokus za $a=4$, $b=-3$.

$(24+15)^2-(16+9)^2-(-15-24)(24-$
$-15)=39^2-25^2+39\cdot 9=1521-625+$
$+351=1872-625=1247.$

Uvrstimo li te vrijednosti u rezultat, izlazi $56\cdot 16+144\cdot 3-81=896+432-81=1247$.

7. Uvjeri se slično da je

$$-(2a^2-3b^2)^2-(-2a^2-3b^2)^2-$$
$$-(-2a^2-3b^2)(-2a^2+3b^2)=-3(4a^4+3b^4).$$

8. Izračunaj:

$$A=(4a-5b+6c)^2-(5a-3b+2c)^2.$$

$A=[(4a-5b)+6c]^2-[(5a-3b)+2c]^2=$
$=(4a-5b)^2+12c(4a-5b)+36c^2-$
$-(5a-3b)^2-4c(5a-3b)-4c^2=-9a^2-$
$-10ab+16b^2+28ac-48bc+32c^2.$

Zadatak se može izračunati da se napiše kao produkt zbroja i razlike t. j.

$A=(4a-5b+6c+5a-3b+2c)(4a-$
$-5b+6c-5a+3b-2c)$

i oba faktora reduciraju i pomnože.

9. Pokaži da je

$A=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+$
$+c)=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2.$

Kad bismo lijevu stranu izračunali po pravilu množenja polinoma s polinomom, računanje bi bilo dugo i nespretno. Brže i jednostavnije doći ćemo do rezultata da se služimo formulom $(M+N)(M-N)=M^2-N^2$.

Pisat ćemo:

$A=[(a+b)+c]\,[(a+b)-c]\,[c+(a-b)]\,[c-$
$-(a-b)=[(a+b)^2-c^2]\,[c^2-(a-b)^2]=$
$=(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)=$
$=[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\,[2ab-(a^2+b^2-c^2)]=$
$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$

Sad samo treba iskvadrirati i reducirati.

Pazi: izraz A znači kvadrat 4-strukog mjernog broja površine trokuta, komu su mjerni brojevi stranica a, b, c.

Izračunaj slično:

10. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+$
$+b-c+d)(a+b+c-d)=-a^4-b^4-$
$-c^4-d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+$
$+2b^2d^2+2c^2d^2+8abcd.$

Matematička ukrštenica

Marko Kovačina, svrš. uč. gimnazije, Mostar

U svako kvadratno polje ne dolazi po jedno slovo, već po jedna arapska cifra! Decimalne zareze ne treba unositi.

Vodoravno:

2. $0{,}75^{0{,}75}$
6. Minimum funkcije $x^2 + 4x + 1375$
8. Rješenje sistema $2^x \cdot 5^y = 2000$, $3^x \cdot 4^y = 5184$ (x pa y)
9. Radius kruga upisanog u istokračan trapez baze 1,2 i opsega 2,75266
10. Površina ravnostranog trougla strane 58,463
12. Treći, pa prvi član geometrijskog reda od tri pozitivna člana, čija je suma 63, a prvi je član za 45 manji od trećega
14. Količnik (< 1) rješenja jednačine $8x^2 - 136x + 560 = 0$
15. $xyz - 49$, ako x, y i z zadovoljavaju sistem $2x + 3y = 19$, $2y + 3z = 24$, $5x + 6z = 61$
17. Broj strana u mnogouglu sa 17954 dijagonala
19. Radius kugle opisane oko pravilnog tetraedra brida 823,7
21. Koji se troznamenkasti broj umanji za 720 kad mu se posljednja znamenka stavi na prvo mjesto?
23. Diferencija ($d \neq 0$) aritmetičkog niza, u kome početni član $a = 52{,}8$ pa treći i deseti član čine geometrijski niz
24. Dva broja (manji pa veći) kojima je aritmetička sredina 88, a njihova razlika je rješenje jednačine $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$ uvećano za 3
25. Rješenje jednačine $10^x = 2{,}6255$

Uspravno:

1. Volumen kugle radiusa 0,29674
2. $\sqrt{0{,}53884}$
3. Radius kruga opisanog pravilnom 54-kutu površine 78,363, uvećan za 3,1
4. $\sqrt[3]{160\,989\,184}$
5. Broj od koga 25% iznosi 2345
7. Rješenje jednačine $4^{(x-2):10} = 8^{(x+8):20}$
10. Tri znamenke trocifrenog broja čine geometrijski niz. Suma prve i treće odnosi se prema srednjoj kao 10 : 3. Ako se broj koji se dobije kad se poredak znamenki obrne umanji za traženi broj, dobije se 792
11. $\log \operatorname{tg} 79° 56' 50''$
13. Antilogaritam broja 2,91062

1	■	2	3		4	5	
6	7			■	8		■
9			■	10			11
	■	12	13		■	14	
15	16	■	17		18	■	
19		20		■	21	22	
■	23		■	24			
25						■	

16. Suma neparnih brojeva između 10 i 66
18. Površina (uvećana za 8,13) kružnog segmenta kome je radius 5, a tetiva 8
20. Dva međusobno normalna radiusa dijele tetivu kruga u tri dijela, koji se odnose kao 1 : 40 : 1. Kolika je ta tetiva, ako je polumjer kruga 318,3?
22. Koji dvocifreni broj poraste za 72 kad mu se cifre izmijene?
24. U trougao osnovice 10 i visine 3 upisan je pravokutnik površine 4,8 čija osnovica leži na osnovici trougla. Kolike vrijednosti može imati baza pravokutnika? (Ispisati veću pa manju).

Rješenje poslati do 30. XI. 1960. Na kuverti naznačiti: „Matematička ukrštenica“. Između učenika, koji pravilno riješe ukrštenicu, ždrijebom će se odrediti njih 10 i nagraditi matematičkim knjigama. Rješenje ukrštenice objavit će se u narednom broju.

Ukrštenica se ne mora izrezivati; dovoljno je rješenje na posebnom papiru, čitljivo potpisanom.

Za vrijeme štampanja lista stigla su ova rješenja

Iz matematike: Радоњић Душан, 4$_8$ р. г. »Ст. Цер«, Никшић, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 431, 432; *Aranđelović Dragoljub*, 3 raz. gimn. Svetozarevo, sve zadatke osim 433; *Petrović Mato*, 2. d r. g. Sl. Požega, 421, 422, 427, 432 i iz fizike 198.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo **»Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.**

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru.

Rukopisi se ne vraćaju.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.
